BOUSSINESQ, J.

Cours d'analyse infinitésimale

Tome 2 fasc. 1

Gauthier-Villars

Paris **1890**

COURS
D'ANALYSE INFINITÉSIMALE.

CALCUL INTÉGRAL.

PARTIE ÉLÉMENTAIRE.

COURS
D'ANALYSE INFINITÉSIMALE

A L'USAGE DES PERSONNES QUI ÉTUDIENT CETTE SCIENCE,

EN VUE

DE SES APPLICATIONS MÉCANIQUES ET PHYSIQUES;

PAR J. BOUSSINESQ,

Membre de l'Institut,
Professeur de Mécanique physique à la Faculté des Sciences de Paris,
Ancien Professeur de Calcul différentiel et intégral
à la Faculté des Sciences de Lille et à l'Institut industriel du Nord.

TOME II.
CALCUL INTÉGRAL.

FASCICULE I.

PARTIE ÉLÉMENTAIRE.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55.

1890

TABLE DES MATIÈRES

DU SECOND VOLUME,

CONSACRÉ AU CALCUL INTÉGRAL.

(Les indications de pages et de numéros ou articles *suivies d'astérisques* renvoient au *Fascicule II*, les autres, au Fascicule I.)

VINGT ET UNIÈME LEÇON.

CALCUL INTÉGRAL : DES INTÉGRALES, TANT DÉFINIES QU'INDÉFINIES; INTÉGRABILITÉ DES EXPRESSIONS DIFFÉRENTIELLES.

VINGT-DEUXIÈME LEÇON.

PROCÉDÉS GÉNÉRAUX POUR LE CALCUL DES INTÉGRALES INDÉFINIES.

VINGT-TROISIÈME LEÇON.

APPLICATION DES PROCÉDÉS GÉNÉRAUX A L'INTÉGRATION DES DIFFÉRENTIELLES ALGÉBRIQUES LES PLUS SIMPLES.

VINGT-QUATRIÈME LEÇON.

DES INTÉGRALES DÉFINIES : NOTIONS FONDAMENTALES ET EXEMPLES DIVERS ; * FONCTION Γ.

Pages.

VINGT-CINQUIÈME LEÇON.

CALCUL APPROCHÉ DES INTÉGRALES DÉFINIES; IDÉE DES INTÉGRALES ELLIPTIQUES ET DES * FONCTIONS ELLIPTIQUES; APPLICATIONS ANALYTIQUES DES INTÉGRALES DÉFINIES.

VINGT-SIXIÈME LEÇON.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DES INTÉGRALES DÉFINIES : QUADRATURE DES AIRES PLANES ET RECTIFICATION DES COURBES.

VINGT-SEPTIÈME LEÇON.

CUBATURE DES VOLUMES ET QUADRATURE DES SURFACES COURBES.

VINGT-HUITIÈME LEÇON.

INTÉGRALES MULTIPLES ET LEUR USAGE; CENTRES DE GRAVITÉ DES FIGURES; VOLUME ET SURFACE LATÉRALE DU TRONC DE PRISME; THÉORÈME DE GULDIN.

VINGT-NEUVIÈME LEÇON.

*RÉDUCTION ET TRANSFORMATION DES INTÉGRALES MULTIPLES; ÉVALUATION APPROXIMATIVE, PAR CES INTÉGRALES, DES RESTES DE CERTAINES SÉRIES, ETC.

TRENTIÈME LEÇON.

ÉTUDE DIRECTE DES INTÉGRALES DÉFINIES ET PROCÉDÉS SPÉCIAUX DE CALCUL POUR CERTAINES D'ENTRE ELLES.

TRENTE ET UNIÈME LEÇON.

* EXPRESSIONS ASYMPTOTIQUES DE CERTAINES INTÉGRALES DÉFINIES ET USAGE DE CES EXPRESSIONS.

TRENTE-DEUXIÈME LEÇON.

* SUITE DES CALCULS D'EXPRESSIONS ASYMPTOTIQUES D'INTÉGRALES DÉFINIES : SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES.

TRENTE-TROISIÈME LEÇON.

TRENTE-QUATRIÈME LEÇON.

TRENTE-CINQUIÈME LEÇON.

TRENTE-SIXIÈME LEÇON.

DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES : THÉORIE DE L'ÉQUATION DU PREMIER ORDRE.

TRENTE-SEPTIÈME LEÇON.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES D'ORDRE SUPÉRIEUR ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES SIMULTANÉES.

TRENTE-HUITIÈME LEÇON.

THÉORIE GÉNÉRALE DES ÉQUATIONS LINÉAIRES; MÉTHODE DE LA VARIATION DES CONSTANTES POUR L'INTÉGRATION D'ÉQUATIONS MÊME NON LINÉAIRES.

TRENTE-NEUVIÈME LEÇON.

APPLICATION DES THÉORIES PRÉCÉDENTES AUX ÉQUATIONS LINÉAIRES DU SECOND ORDRE LES PLUS SIMPLES.

QUARANTIÈME LEÇON.

*ÉTUDE DES ESPÈCES LES PLUS UTILES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES SANS SECONDS MEMBRES, SOIT D'ORDRE SUPÉRIEUR, SOIT SIMULTANÉES : ÉQUATIONS A COEFFICIENTS CONSTANTS.

QUARANTE ET UNIÈME LEÇON.

*SUITE DE L'ÉTUDE DES ESPÈCES LES PLUS UTILES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES SANS SECOND MEMBRE : ÉQUATIONS A COEFFICIENTS VARIABLES QUE L'ON SAIT INTÉGRER OU SOUS FORME FINIE, OU EN SÉRIE, OU PAR DES INTÉGRALES DÉFINIES; FONCTIONS CYLINDRIQUES, ETC.

QUARANTE-DEUXIÈME LEÇON.

*DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES ET DE LEUR INTÉGRATION SOUS FORME FINIE : ÉQUATIONS DU PREMIER ORDRE.

QUARANTE-TROISIÈME LEÇON.

*SUITE DE L'INTÉGRATION, EN TERMES FINIS, DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES : ÉQUATIONS D'ORDRE SUPÉRIEUR.

QUARANTE-QUATRIÈME LEÇON.

* PROCÉDÉS D'INTÉGRATION POUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES, SPÉCIAUX AUX PROBLÈMES DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE QUI CONCERNENT LES CORPS DE GRANDEUR FINIE : ÉTUDE D'ÉTATS VARIABLES EN FONCTION DU TEMPS.

QUARANTE-CINQUIÈME LEÇON.

* SUITE DE L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE POUR LES CORPS DE DIMENSIONS FINIES : ÉTUDE D'ÉTATS PERMANENTS.

QUARANTE-SIXIÈME LEÇON.

* PROCÉDÉS D'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE, POUR LES CORPS D'UNE ÉTENDUE CENSÉE INFINIE : ÉQUATIONS NE CONTENANT QUE DES DÉRIVÉES D'UN MÊME ORDRE PAIR, ET QUI S'INTÈGRENT PAR DES POTENTIELS.

QUARANTE-SEPTIÈME LEÇON.

*SUITE DES PROCÉDÉS D'INTÉGRATION POUR LES PROBLÈMES DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE RELATIFS AUX CORPS D'ÉTENDUE INFINIE ; ÉQUATIONS OU FIGURENT DES DÉRIVÉES D'ORDRES DIFFÉRENTS ET QUI S'INTÈGRENT PAR LES INTÉGRALES DÉFINIES DE LA XXXIII^e LEÇON.

QUARANTE-HUITIÈME LEÇON.

*SUITE DES PROCÉDÉS D'INTÉGRATION POUR LES PROBLÈMES DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE RELATIFS AUX CORPS D'ÉTENDUE INFINIE; ÉQUATIONS QUI S'INTÈGRENT PAR L'EMPLOI SIMULTANÉ DES POTENTIELS ET DES INTÉGRALES DÉFINIES DE LA XXXIII[e] LEÇON.

QUARANTE-NEUVIÈME LEÇON.

*RÉSULTATS GÉNÉRAUX CONCERNANT LA NATURE DES INTÉGRALES DANS LES PROBLÈMES DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE RELATIFS AUX CORPS OU MILIEUX INDÉFINIS; EMPLOI DE LA FORMULE DE FOURIER POUR RÉSOUDRE CES PROBLÈMES.

CINQUANTIÈME LEÇON.

CALCUL DES VARIATIONS.

ERRATA ET ADDITIONS.

Page 3, ligne 14, en remontant, *après* « la fonction $f(x)$ », *ajouter* « supposée encore finie »; et, quatre lignes plus bas, *au lieu du mot* « encore », *lire* « néanmoins ».

Page 4, ligne 15, *au lieu de* « fonction ou continue », *lire* « fonction finie et continue ».

Page 59, ligne 3 du n° 57, *au lieu de* « quelconque m », *lire* « m, supérieur à l'unité ».

Page 64, ligne 11, *au lieu de* « dx », *lire* « du »; et ligne 8, en remontant, *au lieu de* « $\int x^{-m}dx$ », *lire* $-\int x^{-m}dx$ ».

Page 100, ligne 19, *au lieu de* « OA », *lire* « OB' ».

Page 113, à la fin du n° 288, *ajouter, en note :*

(¹) On me fait observer que cette proposition s'énonce d'une manière encore plus simple et plus facile à retenir, sous la forme suivante : *la longueur de toute ellipse dont l'excentricité n'est pas très voisine de l'unité égale sensiblement celle d'une circonférence qui aurait pour rayon la moyenne arithmétique des demi-axes, accrue de son demi-excédent sur leur moyenne géométrique.*

Page 115, lignes 5 et 6, *au lieu de* « longueur », *lire* « côté ».

Page 126, ligne 4, *ajouter, en note :*

(¹) Néanmoins, ces triangles, pour être, à la limite, certainement tangents, devront y garder des côtés distincts en direction, c'est-à-dire n'avoir pas d'angle tendant vers deux droits : on prendra donc leurs sommets, sur la surface, à des distances angulaires comparables dans les divers sens, chose évidemment toujours facile.

Page 129, ligne 12, *au lieu de* « aura fait », *lire* « décrira ».

Page 163, ligne 3, indiquer la limite supérieure « x » de l'intégrale.

Page 181, ligne 8, *au lieu de* « p. 231* », *lire* « p. 232* ».

Page 190, au titre du n° 374, *au lieu de* « intégrales », *lire* « intégrales générales ».

Page 198, ligne 2, *au lieu de* « $u' = f(u)$ », *lire* « $u'' = f(u)$ ».

Page 258, ligne 17, *ôter le mot* « positives ».

Page 265, à la fin du n° 494, *ajouter les phrases suivantes :*

« Observons encore que la courbe plane à aire maxima ou la surface courbe à volume maximum seront essentiellement convexes, c'est-à-dire coupées par toute droite ou tout plan sécants en deux points seulement ou suivant un seul contour : sans quoi, il suffirait de remplacer les parties en creux que détacheraient de la courbe ou de la surface une telle droite ou un tel plan, par les segments interceptés de ceux-ci, pour accroître l'aire A ou le volume V que l'on considère, tout en diminuant l'étendue C ou S de leurs limites : conséquence évidemment impossible dans l'hypothèse du maximum.

» On reconnaît de même que la courbe à aire maxima, sur la sphère, est nécessairement convexe, ou coupée au plus en deux points par les grands cercles de la sphère, pourvu que, du moins, elle se trouve tout entière comprise dans un hémisphère et admette, par suite, comme plus courte distance entre deux quelconques de ses points, l'arc de grand cercle qui les unit. »

Et commencer le n° 495 de cette manière : « Les principes qui précèdent se trouvant ainsi établis, ... ».

Page 13*, dernière ligne, au dénominateur de la première fraction, *lire* « $e^h - 1$ ».

Page 21*, au dénominateur de la formule (5), *lire* « $f'(x)$ »; et, à la dernière ligne, *lire* « $f(x) = (x - c - h_1)(x - c - h_2)\ldots$ ».

Page 35*, à la première formule (21), inscrire la limite supérieure « ∞ » de l'intégrale.

Page 36*, ligne 2, en remontant, *au lieu de* «XXX^e Leçon», *lire* «XXXI^e Leçon».

Page 68*, ligne 7, en remontant, *au lieu de* « il », *lire* « elle ».

Pages 106*, 107*, 108* et 109*, *au lieu de* A, *mettre partout, de préférence,* K.

Page 168*, ligne 6 en remontant, rétablir, au bas du premier signe $\int$, la limite $-\infty$.

Page 227*, ligne 2 en remontant, *au lieu de* « dz », *lire* « $z\,dz$ ».

Page 238*, ligne 4, ajouter :

« Ce faîte ou thalweg, sans être une enveloppe (sauf pour chaque *versant* considéré à part), représente donc une solution singulière et constitue en même temps le lieu des rebroussements des courbes qu'expriment les intégrales particulières. Il fournit un curieux exemple, tout à la fois : 1° de disjonction des deux propriétés de ligne-enveloppe et de lieu de rebroussements, assez ordinairement unies sur une même courbe; 2° de réunion de la qualité de solution singulière avec la même propriété de lieu de rebroussements, dont elle se trouve le plus souvent séparée ».

Page 257*, à la deuxième ligne du titre du n° 385*, *lire* «linéaire homogène».

Page 342*, ligne 17 en remontant, *au lieu de* « tangente en ce point à l'enveloppe », *lire* « menée par ce point de l'enveloppe ».

Page 355*, ligne 6 en remontant, à la fin, *lire* « $P_1 \gtrless 0$ ».

Page 378*, ligne 18 en remontant, *au lieu de* « dérivées premières de u, qui deviennent ... », *lire* «dérivées premières de u en x, y, z, qui deviennent ... ».

Page 495*, ligne 2, *au lieu de* « que l'autre », *lire* «qu'il parvenait à l'autre».

Page 512*, dernière ligne, *au lieu de* «développons-la», *lire* «développons-le».

COURS
D'ANALYSE INFINITÉSIMALE.

CALCUL INTÉGRAL.

PARTIE ÉLÉMENTAIRE.

VINGT ET UNIÈME LEÇON.

CALCUL INTÉGRAL : DES INTÉGRALES TANT DÉFINIES QU'INDÉFINIES : INTÉGRABILITÉ DES EXPRESSIONS DIFFÉRENTIELLES.

213. — But du Calcul intégral; ce qu'on entend par intégrer une différentielle de la forme $f(x)dx$.

On a pu entrevoir, dès la quatrième Leçon (t. I, p. 74), que le Calcul intégral a pour but de remonter des différentielles aux fonctions et, par conséquent, de former les fonctions dont les dérivées ou les différentielles jouissent de propriétés voulues, c'est-à-dire satisfont à des conditions, à des formules données. On s'y propose donc, quand une fonction unique, y, et sa différentielle, dy, sont seules à considérer (ce qui est le cas le plus simple), d'obtenir la fonction au moyen d'une expression de ses changements infiniment petits dy, autant du moins que celle-ci la détermine. Cette opération s'appelle une *intégration* ou, plus précisément, l'intégration de l'expression donnée. Elle équivaut à réunir toutes les valeurs prises successivement par cette expression à mesure qu'ont changé avec continuité les variables à partir d'un état choisi comme primitif, valeurs constituant les différentielles dy de la fonction jusqu'à son nouvel état, ou l'infinité des accroisse-

ments infiniment petits qui y composent son accroissement graduel total, c'est-à-dire la fonction elle-même, si l'on est parti d'un état où elle fût nulle. Ainsi *intégrer*, c'est, au fond, rétablir une quantité dans sa valeur totale, dans ce qu'on peut appeler son *intégralité*, par le rapprochement, la *sommation*, des *éléments* ou parties infiniment petites qui la constituent. Ce mot se justifie donc de lui-même, comme ceux d'*intégration* et de *calcul intégral* qui en dérivent.

Nous verrons plus loin que la différentielle d'une fonction peut être donnée sous diverses formes plus ou moins complexes. Pour le moment, bornons-nous au cas le plus simple, qui est celui où la quantité inconnue ne dépend que d'une variable, x, et où sa différentielle, donnée explicitement en fonction de cette variable seule, est de la forme $f(x)\,dx$, $f(x)$ désignant, comme on voit, la fonction connue qui exprime sa dérivée. Nous représenterons par $F(x)$ la fonction cherchée, ayant pour différentielle $f(x)\,dx$: on l'appelle quelquefois la *fonction primitive* de $f(x)$, par opposition à celle-ci, $f(x)$, qui en est dite, comme nous savons depuis longtemps, la *dérivée*.

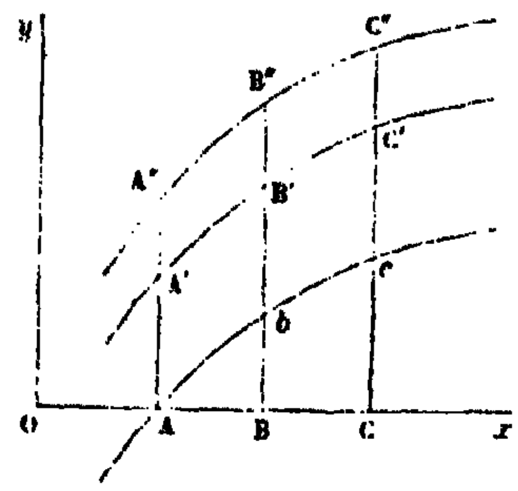
Ces dénominations sont parfaitement justes quand on aborde l'analyse infinitésimale par l'étude des courbes algébriques et des fonctions algébriques, dont les équations ou expressions finies se présentent en effet comme primitives, c'est-à-dire comme logiquement antérieures aux équations différentielles de ces courbes ou aux formules des variations infiniment petites de ces fonctions. Mais il n'en est plus de même dans d'autres questions d'Analyse ou de Géométrie pures, et surtout quand on se place au point de vue des applications physiques. En effet, *dans la nature, ce sont les différentielles, plutôt que leurs sommes, qu'on peut regarder comme primitives;* car ce sont les changements infiniment petits des quantités concrètes, c'est-à-dire les flux ou rapidités de variation, que les lois des choses déterminent immédiatement, en les réglant, il est vrai, à chaque instant, d'après l'état actuel déjà réalisé, c'est-à-dire d'après les valeurs intégrales présentes du système de quantités dont il s'agit.

214. — Existence et degré d'indétermination de la fonction dite primitive.

Remarquons qu'il existe toujours, quelle que soit la fonction donnée $f(x)$, une fonction continue $F(x)$, qui répond à la question, ou dont la dérivée est $f(x)$. Pour le concevoir, imaginons que x soit, dans le plan xOy, une abscisse horizontale variable, d'abord égale à une certaine quantité $OA = a$, que nous appellerons sa *valeur initiale*,

puis indéfiniment croissante ou décroissante d'une manière continue. Cette abscisse prendra donc, successivement, des valeurs telles que OA, OB, OC,.... Menons à son extrémité mobile A, B, C,... une ordonnée verticale y, qui, après avoir eu une première valeur AA′ quelconque, grandisse ou diminue à chaque instant, ou à partir de

Fig. 42.



chaque valeur x de l'abscisse, de quantités dy égales au produit de la valeur actuelle de la fonction $f(x)$ par le transport infiniment petit dx de l'ordonnée, survenu aussitôt après. En d'autres termes, disposons de la *pente*, arbitrairement variable entre $-\infty$ et $+\infty$, qui définit la direction suivant laquelle se meut à chaque instant la seconde extrémité, A′, B′, C′,... de cette ordonnée verticale, de manière à lui faire prendre sans cesse la valeur actuelle de $f(x)$. Il est clair que, si $f(x)$ varie graduellement avec x, la seconde extrémité dont il s'agit décrira dans le plan une certaine courbe, A′B′C′..., pendant que l'ordonnée occupera successivement les positions AA′, BB′, CC′,...; et si, au contraire, la fonction $f(x)$ se trouve être discontinue, mais seulement pour des valeurs *isolées* de x, cas où la courbe tracée ne sera *bien* continue elle-même que dans l'intervalle de deux discontinuités consécutives de $f(x)$, la trajectoire tout entière de la seconde extrémité de l'ordonnée y possédera encore, aux points anguleux qui y marqueront le passage d'un intervalle à l'autre, une stricte continuité, caractérisée par l'absence de toute rupture complète (ou séparation).

Or, dans les deux cas, cette trajectoire, une fois construite, définit parfaitement son ordonnée y en fonction de l'abscisse x; et la manière même dont elle a été décrite, ou dont on a réglé à chaque instant sa direction, montre qu'on y aura partout $dy = f(x)\,dx$ ou $y' = f(x)$. Par conséquent, son ordonnée variable y est bien la fonction primitive demandée $F(x)$ ou, du moins, une fonction primitive, c'est-à-dire ayant pour différentielle $f(x)\,dx$.

On voit même que la droite AA', *valeur initiale* de cette fonction, pourrait être allongée ou raccourcie d'une quantité quelconque A'A''; et qu'on obtiendrait alors une nouvelle courbe, A''B''C''.... dont l'ordonnée, que j'appellerai Y, aurait également pour dérivée $f(x)$, ou exprimerait, elle aussi, au même titre que la précédente, une fonction primitive. Mais il importe d'observer que la différence $Y - y$ des deux ordonnées se maintiendrait invariable, ou que l'on aurait

$$A'A'' = B'B'' = C'C'' = \ldots.$$

En effet, l'expression $Y - y$, ayant sa dérivée $Y' - y'$ ou $f(x) - f(x)$ identiquement nulle, se réduit forcément à une quantité constante (t. I, p. 34). Donc, si nous désignons par c une *constante arbitraire*, positive ou négative à volonté, la fonction primitive la plus générale de $f(x)$ sera $y + c$ ou $F(x) + c$.

En résumé, *quelle que soit la différentielle donnée, de la forme* $f(x)\,dx$, *dans laquelle toutefois* $f(x)$ *désigne une fonction ou continue ou affectée seulement de discontinuités accidentelles, on peut toujours se représenter, et il existe, en conséquence, une fonction continue,* $F(x)$, *qui admet cette différentielle* $f(x)\,dx$, *c'est-à-dire dont la dérivée est* $f(x)$. *De plus, la différentielle* $f(x)\,dx$ *définit complètement les changements éprouvés par cette fonction, ou ce qu'on peut appeler sa partie variable avec* x; *mais elle laisse entièrement libre sa partie constante, ou une première valeur, dite initiale*. Aussi doit-on comprendre soit explicitement, soit implicitement, dans celle-ci, une *constante arbitraire*, dont la détermination s'effectue à l'aide d'une donnée ou condition accessoire propre à chaque problème.

215. — Intégrale définie et intégrale indéfinie d'une différentielle $f(x)\,dx$; signification et emploi du signe $\int$.

Supposons que, x ayant reçu d'abord la valeur a, on ait choisi égale à zéro la valeur correspondante de l'ordonnée de la courbe, ou, ce qui revient au même, donnons-nous la constante arbitraire c égale à

$$-AA' = -F(a).$$

La fonction primitive que nous obtiendrons sera ainsi l'ordonnée de la courbe, Abc... (p. 3), construite en retranchant partout la constante $F(a)$ de l'ordonnée $y = F(x)$ de la courbe A'B'C'... considérée d'abord. Cette fonction primitive, $F(x) - F(a)$, joindra donc à la propriété d'avoir pour différentielle $f(x)\,dx$ celle d'être initialement nulle, ou de se former, peu à peu, par l'apport exclusif des va-

leurs que sa différentielle $f(x)\,dx$ reçoit pendant que x, après avoir égalé a, éprouve les variations continues ou insensibles dx, d'ailleurs complètement arbitraires quant à leurs rapports mutuels et à leurs signes.

La somme de toutes ces valeurs successives de la différentielle $f(x)\,dx$ se représente quelquefois, suivant une notation que nous avons déjà employée (t. I, p. 66), par le symbole $\Sigma f(x)\,dx$. Mais, comme les *éléments* ainsi ajoutés sont infiniment petits et infiniment nombreux, en sorte qu'il s'agit d'une limite de sommes (*id.*, p. 65) et non d'une somme déterminée, il est bon d'exprimer nettement, au moyen d'une forme spéciale donnée au signe de sommation, l'intention où l'on est de passer à la limite en faisant décroître tous les termes jusqu'à zéro et croître leur nombre au delà de toute grandeur. A cet effet, on remplace le Σ grec par le symbole $\int$, dû à Leibnitz et qui n'est qu'une S (initiale du mot *somme*) déformée. C'est ainsi que, dans le Calcul différentiel, la substitution de la lettre d à la lettre grecque Δ avait traduit une intention analogue. Et, pour que cette intention se manifeste aussi dans le langage parlé, le symbole $\int$ s'énonce *intégrale*, plus particulièrement que *somme*, de même que le signe d s'est appelé *différentielle* et non *différence*. Par conséquent, la somme des valeurs prises successivement par la différentielle $f(x)\,dx$ quand x varie avec continuité s'écrira $\int f(x)\,dx$ et se lira *intégrale de* $f(x)\,dx$ ou *somme de* $f(x)\,dx$.

Cette somme étant égale à $F(x) - F(a)$ quand la valeur initiale de x est a, on aura

$$\int f(x)\,dx = F(x) - F(a).$$

Une telle expression s'appelle une *intégrale définie*. Sa valeur, comme on voit, est complètement déterminée, parce qu'on se donne celle, a, à partir de laquelle x a commencé à varier; et c'est justement cette détermination parfaite qu'on exprime par l'adjectif *définie*.

Pour en donner un exemple très simple, posons $f(x) = x$ et $a = 0$, ou soit $x\,dx$ l'expression à intégrer, dans l'hypothèse d'une valeur initiale nulle de x. Il est clair, par une différentiation immédiate, qu'une des fonctions primitives $F(x)$ ayant pour dérivée x est $\frac{1}{2}x^2$; et, comme cette fonction s'évanouit avec x, ou que l'on a ici $F(a) = F(0) = 0$, il vient $\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2$.

Mais, si l'on n'expliquait pas quelle a été la première valeur de x, le terme $-F(a)$ pourrait généralement recevoir, comme a, une infinité de valeurs différentes, comprises ou non entre certaines limites; et ce serait (du moins entre ces limites, s'il y restait contenu) une

constante arbitraire. En la représentant par c, on aurait donc

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c.$$

Alors la quantité $\int f(x)dx$, indéterminée en partie, prend le nom d'*intégrale indéfinie.* On voit que, sauf cette circonstance que c peut bien quelquefois n'y pas sortir d'un certain intervalle, elle comporte la même expression analytique, $F(x) + c$, que la fonction primitive la plus générale de $f(x)$. Aussi a-t-on pris l'habitude de regarder les deux termes, *intégrale indéfinie* et *fonction primitive*, comme synonymes. On dira, indifféremment, l'intégrale de $f(x)\,dx$ et la fonction primitive de $f(x)$, en sous-entendant que la constante arbitraire impliquée dans celle-ci devra se déterminer de manière à faire commencer l'intégrale pour telle valeur de x qu'on voudra.

Le symbole $\int$ dispensera de donner un nom spécial, tel que $F(x)$, à la fonction primitive de $f(x)$, puisqu'on la désignera bien mieux par l'expression $\int f(x)\,dx$, qui a l'avantage de rappeler son mode le plus naturel de génération. Par suite, *le signe d'intégration $\int$ sera l'opposé du signe de différentiation d*; et celui-ci, placé au devant de l'autre, le détruira identiquement, d'après le sens même qu'on leur attribue : on aura, par exemple,

$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx.$$

Mais on ne peut pas dire, au même degré, que le signe $\int$, placé au devant du signe d, le détruise; car

$$\int d\,F(x) = F(x) + \text{une constante arbitraire, et non } F(x) \text{ seulement.}$$

La différence provient de ce que la différentiation est une opération donnant un résultat parfaitement défini, tandis que l'intégration d'une différentielle $f(x)\,dx$ est une opération propre à faire connaître uniquement les variations de la quantité cherchée et non sa valeur initiale.

216. — Ce qu'on entend par l'intégrabilité d'une expression de la forme $M\,dx + N\,dy + P\,dz + \ldots$.

Nous nous occuperons de la recherche des fonctions primitives ou, ce qui revient au même, du calcul des intégrales indéfinies, avant de considérer spécialement les intégrales définies. Mais il convient, auparavant, d'étendre les considérations générales qui précèdent, touchant les expressions de la forme $f(x)\,dx$, aux expressions différentielles analogues à plusieurs termes et affectées de plusieurs variables x, y,

$z, \ldots$, afin d'examiner si ce seront toujours les différentielles totales de certaines fonctions, et quelle marche on pourra suivre, quand, en effet, de telles fonctions existeront, pour ramener leur recherche à des intégrations comme celle de $f(x)\,dx$.

Soit donc $M\,dx + N\,dy + P\,dz + \ldots$ la plus générale des expressions dont il s'agit, c'est-à-dire celle qui les comprend toutes, les coefficients M, N, P, ... des différentielles $dx, dy, dz, \ldots$ y étant des fonctions connues quelconques de $x, y, z, \ldots$; et demandons-nous d'abord en quoi pourra consister son intégration, supposé que $x, y, z, \ldots$ y varient avec continuité et simultanément, depuis certaines valeurs initiales constantes $a, b, c, \ldots$ jusqu'à d'autres valeurs quelconques $x, y, z, \ldots$.

Pour fixer les idées, réduisons d'abord à trois, x, y, z, les variables; et faisons-leur exprimer alors les coordonnées des divers points de l'espace par rapport à un système d'axes; de sorte que chaque triple série des valeurs de x, y, z que l'on a en vue se trouve représentée par une ligne, issue du point constant de départ (a, b, c) et aboutissant au point voulu d'arrivée (x, y, z). Nous savons (t. I, p. 115) que, le long de cette ligne, deux des coordonnées, y et z par exemple, seront fonctions de l'autre, x, et que, plus généralement, dans chaque série multiple des valeurs de variables $x, y, z, \ldots$ en nombre quelconque et qui changent à la fois, il correspond, aux diverses valeurs de l'une, certaines valeurs de chacune des autres, dès lors fonctions de la première. Nous pourrons donc, s'il y a, par exemple, trois variables, poser $y = \psi(x)$, $z = \chi(x)$, ψ et χ désignant ici deux fonctions continues de x, astreintes à avoir b, c pour valeurs initiales et les valeurs finales y, z données, mais, dans tout l'intervalle, entièrement arbitraires. Comme il en résulte $dy = \psi'(x)\,dx$, $dz = \chi'(x)\,dx$, et que d'ailleurs M, N, P, fonctions connues de x, y, z, deviennent dépendantes seulement de x, l'expression proposée $M\,dx + N\,dy + P\,dz$ se change en $[M + N\psi'(x) + P\chi'(x)]\,dx$: elle reçoit donc la forme $f(x)\,dx$, avec des valeurs de $f(x)$ parfaitement déterminées aux divers points de chaque arc où, d'un bout à l'autre, x varie dans un même sens. Par suite, la somme des valeurs prises par cette expression le long du chemin suivi, somme qu'on peut écrire $\int(M\,dx + N\,dy + P\,dz)$, ne sera autre qu'une intégrale, $\int f(x)\,dx$, du genre de celles dont nous avons commencé l'étude, ou se composera de telles intégrales; et elle aura une valeur déterminée dès que la ligne définie par les fonctions $y = \psi(x)$, $z = \chi(x)$, étant donnée, fera parfaitement connaître la fonction $f(x) = M + N\psi'(x) + P\chi'(x)$.

Mais, justement parce que cette valeur doit dépendre en général du

chemin suivi, et non pas uniquement du point d'arrivée ou des valeurs finales x, y, z des variables, il y a lieu de se demander dans quels cas, ou pour quelles formes des fonctions M, N, P, elle varie seulement avec ces valeurs finales x, y, z, supposées quelconques, et devient par conséquent une véritable fonction de point, la même en chaque endroit (x, y, z) de l'espace quelle que soit, à partir de (a, b, c), la voie le long de laquelle on l'aura formée. S'il n'y avait que deux variables x et y, les lignes considérées, alors définies par $y = \psi(x)$, toutes issues d'un point donné (a, b) du plan des xy, n'auraient pas à sortir de ce plan. Et le cas remarquable qu'il s'agit d'examiner serait celui où l'intégrale $\int(\mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy)$ dépendrait uniquement du point (x, y) d'arrivée; ce qui permettrait de l'exprimer par une ordonnée perpendiculaire z en émanant, dont la seconde extrémité, mobile avec (x, y), décrirait une surface continue

$$z = \int(\mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy),$$

représentative de l'intégrale. Quand, les variables se réduisant toujours à x et y, il n'en est pas ainsi, la somme $z = \int(\mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy)$ représente bien encore l'ordonnée verticale d'une infinité de courbes parties d'un même point (a, b, o) et se distinguant les unes des autres par leurs projections horizontales $y = \psi(x)$; mais ces courbes se trouvent éparpillées à diverses hauteurs z en arrivant sur une même verticale quelconque (x, y), et, par conséquent, elles ne couvrent pas toutes une surface unique.

Si l'expression $\mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy + \ldots$ contenait, au contraire, plus de trois variables, ou que toute représentation géométrique simple fît défaut, il n'y aurait pas moins à remarquer le cas important où l'intégrale $\int(\mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy + \ldots)$, prise à partir de valeurs fixes $a, b, \ldots$ des variables, dépendrait uniquement des valeurs finales x, y, ... de celles-ci, et non des valeurs intermédiaires ou de la manière dont y, z, ... y auraient varié en fonction de x.

Ainsi, dans la supposition la plus générale quant au nombre des variables, l'expression à intégrer $\mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy + \ldots$, que l'hypothèse d'un mode quelconque de variation simultanée de x, y, ... réduit au type plus simple $f(x)dx$, mérite une étude spéciale lorsque la forme des fonctions M, N, ... y rend la somme $\int(\mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy + \ldots)$ dépendante des valeurs finales x, y, ... des variables, mais non de leurs valeurs produites entre celles-là et les valeurs initiales fixes a, b, ... Alors appelons $\mathrm{F}(x, y, \ldots)$ l'intégrale (définie) ou posons

$$\mathrm{F} = \int(\mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy + \ldots),$$

et donnons aux valeurs finales considérées $x, y, \ldots$ des accroissements infiniment petits quelconques $dx, dy, \ldots$. Comme on peut amener graduellement les variables, des valeurs initiales $a, b, \ldots$, aux proposées $x+dx, y+dy, \ldots$, en les faisant passer par les précédentes valeurs finales $x, y, \ldots$, l'intégrale comprendra maintenant, outre les mêmes éléments, c'est-à-dire les mêmes différentielles successives, que tout à l'heure, la nouvelle partie, assimilable à un dernier élément, $M\,dx + N\,dy + \ldots$, dans laquelle $x, y, \ldots$ seront les précédentes valeurs finales et $dx, dy, \ldots$ les excédents, sur celles-là, des valeurs finales actuelles. En conséquence, l'accroissement éprouvé par la fonction F a la valeur $M\,dx + N\,dy + \ldots$ quels que soient les rapports mutuels de $dx, dy, \ldots$; ce qui, en choisissant égales à zéro toutes ces différentielles à l'exception d'une seule et puis divisant par celle-ci, donne pour dérivées partielles en $x, y, \ldots$ de la fonction F les coefficients mêmes $M, N, \ldots$. Il vient donc, identiquement (ou pour des valeurs quelconques de $x, y, \ldots$), $M = \frac{dF}{dx}$, $N = \frac{dF}{dy}$, ... Ainsi, *l'intégrale* $\int (M\,dx + N\,dy + \ldots)$ *dépend, uniquement, des valeurs finales des variables (leurs valeurs initiales restant fixes), à la condition nécessaire que les coefficients* $M, N, \ldots$ *de l'expression proposée* $M\,dx + N\,dy + \ldots$ *soient les dérivées partielles respectives d'une même fonction par rapport à* $x, y, \ldots$.

Réciproquement, *cette condition est suffisante;* car, dès que $M, N, \ldots$ égalent constamment les dérivées partielles en $x, y, \ldots$ d'une fonction déterminée $\varphi(x, y, \ldots)$, chaque valeur de

$$M\,dx + N\,dy + \ldots,$$

correspondant à une variation élémentaire donnée $dx, dy, \ldots$ du système des variables, représente l'accroissement infiniment petit simultané $d\varphi$ de cette fonction, et, par suite, la somme

$$F = \int (M\,dx + N\,dy + \ldots)$$

n'est (à la limite) autre chose que l'accroissement total de φ, savoir $\varphi(x, y, \ldots) - \varphi(a, b, \ldots)$, quantité dépendant bien uniquement des valeurs finales $x, y, \ldots$ des variables, lorsque les valeurs initiales $a, b, \ldots$ sont fixées, et, par conséquent, ne dépendant pas de leurs valeurs intermédiaires.

La question revient donc à chercher les fonctions φ qui vérifient à la fois les équations $\frac{d\varphi}{dx} = M$, $\frac{d\varphi}{dy} = N$, ... Quand de telles fonctions existent, l'expression proposée prend le nom de *différentielle exacte;*

et elle est dite *immédiatement intégrable*, pour exprimer que la somme $\int(\mathrm{M}\,dx + \mathrm{N}\,dy + \ldots)$ peut s'obtenir ou, du moins, constitue une fonction des valeurs finales $x, y, \ldots$ *bien définie* (à partir de valeurs initiales données $a, b, \ldots$), sans qu'on ait besoin de faire subir aux éléments $\mathrm{M}\,dx + \mathrm{N}\,dy + \ldots$ aucune transformation. Les conditions auxquelles doivent, pour cela, satisfaire les coefficients M, N, ... s'appellent *conditions d'intégrabilité.*

Il est clair que la différence de deux de ces fonctions φ aura ses dérivées partielles en $x, y, \ldots$ identiquement nulles; ce qui, dans toute manière de faire varier à la fois $x, y, \ldots$, annulera sans cesse sa dérivée complète par rapport à la variable indépendante choisie et, par suite, ses changements totaux. Cette différence est donc invariable; et toutes les fonctions φ se déduisent de l'une quelconque d'entre elles par l'addition d'une constante c, évidemment arbitraire. L'expression générale de φ ainsi obtenue s'appelle, comme dans le cas de la différentielle $f(x)\,dx$, *l'intégrale indéfinie* de $\mathrm{M}\,dx + \mathrm{N}\,dy + \ldots$ et se représente d'ordinaire par la formule $\int(\mathrm{M}\,dx + \mathrm{N}\,dy + \ldots)$, dans laquelle on laisse alors indéterminées les valeurs initiales $a, b, \ldots$ ou la constante $-\varphi(a, b, \ldots)$.

Nous allons voir, en considérant d'abord le cas de deux variables seulement x, y, quelles sont les conditions d'intégrabilité, et comment on peut, quand elles se trouvent vérifiées, obtenir l'intégrale indéfinie φ.

217. — Marche à suivre, en général, pour intégrer $\mathrm{M}\,dx + \mathrm{N}\,dy$; condition d'intégrabilité.

Soit donc $\mathrm{M}\,dx + \mathrm{N}\,dy$ la différentielle proposée, ou

$$(1) \qquad \frac{d\varphi}{dx} = \mathrm{M}, \qquad \frac{d\varphi}{dy} = \mathrm{N},$$

les deux équations à résoudre. Appelons $\int \mathrm{M}\,dx$ une fonction de x et y ayant M pour sa dérivée partielle en x et obtenue, par conséquent, en intégrant $\mathrm{M}\,dx$ sans faire varier y : chose que nous savons être toujours possible, en ce sens du moins que la fonction primitive considérée existe. Comme on aura identiquement $\mathrm{M} = \frac{d}{dx}\int \mathrm{M}\,dx$, la première équation (1) pourra s'écrire $\frac{d}{dx}(\varphi - \int \mathrm{M}\,dx) = 0$, et elle signifiera que la différence $\varphi - \int \mathrm{M}\,dx$ ne dépend pas de x, mais dépend seulement des autres variables, c'est-à-dire ici de y. Si nous la représentons par $\psi(y)$, nous aurons

$$(2) \qquad \varphi = \int \mathrm{M}\,dx + \psi(y);$$

et il nous restera, pour déterminer la fonction arbitraire $\psi(y)$, la deuxième équation (1) qui, vu la valeur (2) de φ, devient

$$\frac{d}{dy}\int M\,dx + \psi'(y) = N,$$

ou

$$\psi'(y) = N - \frac{d}{dy}\int M\,dx. \tag{3}$$

Or la fonction $\psi(y)$ et, par suite, sa dérivée $\psi'(y)$ n'étant astreintes jusqu'ici qu'à ne pas dépendre de x, il suffira, pour qu'on puisse donner à $\psi'(y)$ la valeur $N - \frac{d}{dy}\int M\,dx$, que cette valeur soit bien indépendante de x, ou, ce qui revient au même, que la dérivée en x de $N - \frac{d}{dy}\int M\,dx$ se réduise constamment à zéro. Si cette condition est remplie, l'expression (3) de $\psi'(y)$, multipliée par dy et intégrée sans faire varier x, donnera

$$\psi(y) = \int\left(N - \frac{d}{dy}\int M\,dx\right)dy + \text{une constante arbitraire } c,$$

valeur qui, portée dans (2), achèvera de déterminer la forme de φ en x et y,

$$\varphi = \int M\,dx + \int\left(N - \frac{d}{dy}\int M\,dx\right)dy + c. \tag{4}$$

L'intégration de la différentielle totale $M\,dx + N\,dy$ en comprendra donc généralement deux dans le genre de celle de $f(x)\,dx$, c'est-à-dire effectuées en n'y faisant changer, pour chacune, qu'une seule variable : la première, celle de $M\,dx$, aura lieu en ne faisant varier que x, ou elle se fera, comme on dit, *par rapport à* x ; la seconde, relative à y, se fera sur l'expression $N - \frac{d}{dy}\int M\,dx$.

Mais on voit que les fonctions M et N devront, pour que le problème soit possible, satisfaire à la condition, nécessaire et suffisante, de rendre nulle identiquement la dérivée en x de $N - \frac{d}{dy}\int M\,dx$. Ainsi l'on a pour toute condition d'intégrabilité la relation

$$\frac{dN}{dx} - \frac{d^2}{dx\,dy}\int M\,dx = 0, \qquad \text{ou} \qquad \frac{dN}{dx} - \frac{d}{dy}\left(\frac{d}{dx}\int M\,dx\right) = 0;$$

et comme enfin, par définition, $\frac{d}{dx}\int M\,dx$ n'est autre que M, cette

condition d'intégrabilité devient simplement

$$(5) \qquad \frac{dN}{dx} - \frac{dM}{dy} = 0.$$

Elle signifie, en langage ordinaire, que, *dans l'expression donnée* $M\,dx + N\,dy$, *le coefficient affectant la différentielle d'une des deux variables doit avoir, par rapport à l'autre variable, même dérivée que le coefficient de la différentielle de celle-ci par rapport à la première.*

On l'aurait immédiatement prévu en observant que, si la fonction φ existe, M, N sont ses deux dérivées premières, et que $\frac{dM}{dy}$, $\frac{dN}{dx}$ constituent par suite les deux expressions $\frac{d^2\varphi}{dy\,dx}$ et $\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}$ de sa dérivée seconde oblique. Mais la démonstration précédente fait voir de plus que cette égalité, évidemment nécessaire, des deux dérivées réciproques de M et N, est suffisante pour que la fonction φ existe.

218. — Extension de la méthode précédente au cas d'un nombre quelconque de variables.

Supposons maintenant que l'expression à intégrer soit

$$M\,dx + N\,dy + P\,dz,$$

ou qu'on ait trois variables x, y, z et, par conséquent, les trois équations à vérifier

$$(6) \qquad \frac{d\varphi}{dx} = M, \qquad \frac{d\varphi}{dy} = N, \qquad \frac{d\varphi}{dz} = P.$$

On pourra d'abord ne considérer que les deux premières, ou choisir, parmi toutes les manières possibles de faire varier à la fois x, y et z, celles où z ne change pas. On sera ainsi ramené au cas de deux variables x, y; et, si la condition d'intégrabilité (5) est satisfaite quel que soit z, la formule (4), qui implique deux intégrations, l'une en x, l'autre en y, fera connaître la fonction φ la plus générale qui puisse de la sorte vérifier les deux premières relations (6). Observons seulement que, dans cette formule (4) et d'après la démonstration même qui a conduit à la poser, le terme complémentaire indéterminé c n'est astreint qu'à ne pas dépendre de x ni de y : ce n'est qu'en ce sens, ou par rapport à x et à y, qu'on l'a dit constant. Dès qu'il y a lieu de considérer une nouvelle variable z, il peut donc devenir une fonction arbitraire de z. Aussi le désignerons-nous par $\psi(z)$. Quant à la partie

dépendante de x et y, savoir $\int M\,dx + \int\left(N - \frac{d}{dy}\int M\,dx\right)dy$, et où z, en général, entrera aussi par M et N, nous l'écrirons simplement $\int(M\,dx + N\,dy)$, pour nous rappeler que ses deux dérivées respectives en x et y sont M et N. Nous aurons donc, en vertu des deux premières équations (6) du problème, comme expression la plus générale possible de φ, la suivante

$$\varphi = \int(M\,dx + N\,dy) + \psi(z), \tag{7}$$

où il ne restera d'indéterminé, c'est-à-dire de disponible pour essayer de satisfaire à la troisième équation (6), que le terme $\psi(z)$.

Or cette troisième équation (6) devient aisément, par la substitution à φ de sa valeur (7),

$$\psi'(z) = P - \frac{d}{dz}\int(M\,dx + N\,dy). \tag{8}$$

D'ailleurs, $\psi'(z)$ ne se trouvant astreint qu'à ne pas dépendre de x ni de y, on pourra vérifier cette équation (8) si son second membre est en effet une expression de $\psi'(z)$ acceptable ou indépendante de x et de y, c'est-à-dire à la double condition que ses deux dérivées partielles en x et en y se réduisent à zéro pour toutes les valeurs possibles de x, y et z. Il y aura donc deux conditions d'intégrabilité à joindre à la précédente (5), et ce seront, sous une forme condensée qui nous est familière, les deux relations

$$\frac{dP}{d(x,y)} - \frac{d^2}{d(x,y)\,dz}\int(M\,dx + N\,dy) = 0,$$

ou

$$\frac{dP}{d(x,y)} - \frac{d}{dz}\,\frac{d\int(M\,dx + N\,dy)}{d(x,y)} = 0,$$

c'est-à-dire, finalement,

$$\frac{dP}{dx} - \frac{dM}{dz} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{dP}{dy} - \frac{dN}{dz} = 0. \tag{9}$$

Ainsi l'introduction de la troisième variable z, ou de la troisième équation (6), a pour effet de rendre nécessaires les deux nouvelles conditions d'intégrabilité (9); et celles-ci expriment que les deux dérivées, en x et y, du coefficient P affectant la différentielle de la variable nouvelle z, doivent être égales respectivement aux dérivées, par rapport à z, des coefficients M et N des différentielles dx et dy. Ces conditions sont, comme on voit, analogues à la première, (5), et leur nécessité se trouvait également évidente.

Si les expressions données de M, N, P les vérifient, la relation (8), multipliée par dz et intégrée, fera connaître $\psi(z)$ à une constante arbitraire près, et, en appelant $\int(\mathrm{M}\,dx+\mathrm{N}\,dy+\mathrm{P}\,dz)$ ce que sera toute la partie du second membre de (7) contenant x, y, z, il viendra

$$(10)\qquad \varphi = \int(\mathrm{M}\,dx + \mathrm{N}\,dy + \mathrm{P}\,dz) + \text{une constante arbitraire } c.$$

Concevons actuellement que M, N, P dépendent encore d'une quatrième variable u, et que l'on ajoute une nouvelle équation à vérifier, $\frac{d\varphi}{du} = \mathrm{Q}$. Il est clair que le dernier terme c de (10), constant seulement en ce sens qu'il ne dépend ni de x, ni de y, ni de z, sera une fonction provisoirement arbitraire, ψ, de u, à déterminer de manière qu'on ait $\frac{d\varphi}{du} = \mathrm{Q}$. De là se tirera la valeur de $\psi'(u)$, et, vu l'impossibilité, pour cette valeur, de dépendre de x, y ou z, il viendra, comme nouvelles conditions d'intégrabilité, l'égalité des dérivées respectives de Q en x, y et z à celles de M, N, P par rapport à u. Et ainsi de suite.

En résumé : 1° le procédé suivi s'étend au cas d'autant de variables qu'on le veut; 2° il exige, généralement, autant d'intégrations qu'il y a de variables indépendantes, savoir, une intégration par rapport à chaque variable; 3° toutes les conditions d'intégrabilité consistent en ce que, dans l'expression donnée $\mathrm{M}\,dx + \mathrm{N}\,dy + \ldots$, les coefficients des différentielles de deux variables quelconques doivent avoir leurs dérivées premières respectives, prises, pour chacun, par rapport à la variable dont il n'affecte pas la différentielle, identiquement égales entre elles.

219. — Exemples de différentielles totales qui s'intègrent facilement.

Deux exemples très simples de l'intégration d'une différentielle totale montreront qu'on peut employer, dans divers cas, des procédés spéciaux suggérés par une vue directe de l'expression proposée, et qui dispensent de recourir à la méthode générale.

Soit d'abord la différentielle, à deux variables,

$$(11)\qquad \frac{(ax - by)\,dx + (ay + bx)\,dy}{x^2 + y^2},$$

où a et b désignent deux constantes quelconques. On a ici

$$\mathrm{M} = \frac{ax - by}{x^2 + y^2}, \qquad \mathrm{N} = \frac{ay + bx}{x^2 + y^2},$$

fonctions vérifiant bien la condition d'intégrabilité (5); car des différentiations immédiates donnent

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx} = -\frac{2axy + b(x^2 - y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Pour intégrer, on groupera, dans (11), d'une part, les termes en a et, d'autre part, les termes en b. Les premiers donneront en tout $a\frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2}$ ou $\frac{a}{2}\frac{d(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$; et, comme le rapport de la différentielle d'une quantité x^2+y^2 à cette quantité même est précisément la différentielle de son logarithme népérien $\log(x^2+y^2)$, la partie considérée, en a, de l'expression (11), pourra s'écrire

$$\frac{a}{2}\,d\log(x^2+y^2), \qquad \text{ou} \qquad d\left[\frac{a}{2}\log(x^2+y^2)\right] = d\left(a\log\sqrt{x^2+y^2}\right).$$

D'autre part, les termes qui, dans (11), contiennent b, ont pour somme $b\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$. Or, d'après la règle de différentiation d'un quotient (t. I, p. 77), l'expression $x\,dy - y\,dx$, si on la divisait par x^2, serait la différentielle du rapport $\frac{y}{x}$, en sorte que la somme considérée revient à $b\frac{x^2\,d\frac{y}{x}}{x^2+y^2}$, ou à $b\frac{d\frac{y}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$; et comme enfin la différentielle d'une quantité $\frac{y}{x}$, divisée par le carré de celle-ci accru de 1, exprime la différentielle de l'arc ayant pour tangente cette même quantité $\frac{y}{x}$, la somme en question n'est autre que $b\,d\,\text{arc tang}\frac{y}{x}$ ou $d\left(b\,\text{arc tang}\frac{y}{x}\right)$. Donc l'expression (11) tout entière équivaut à

$$d\left[a\log\sqrt{x^2+y^2} + b\,\text{arc tang}\frac{y}{x}\right];$$

et il vient

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int\frac{(ax - by)\,dx + (ay + bx)\,dy}{x^2+y^2} \\ &\quad = a\log\sqrt{x^2+y^2} + b\,\text{arc tang}\frac{y}{x} + \text{const.} \end{aligned}\right.$$

Soit encore à intégrer l'expression suivante, qui, en conservant sa forme, pourrait contenir un nombre quelconque de variables,

$$(13)\quad (y+z+u)\,dx + (z+u+x)\,dy + (u+x+y)\,dz + (x+y+z)\,du.$$

Toutes les conditions d'intégrabilité sont vérifiées, puisque dans (13) le coefficient de la différentielle de chaque variable a ses dérivées, par rapport à toutes les autres variables, égales à l'unité, et qu'il vient bien ainsi $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}, \frac{dM}{dz} = \frac{dP}{dx}, \dots$.

Pour effectuer simplement l'intégration, appelons S la somme, $x+y+z+u$, de toutes les variables; puis, observons que le coefficient, $y+z+u$, de dx, est $S-x$, et, de même, celui de dy, $S-y$, etc. La différentielle proposée (13) s'écrira donc, successivement,

$$\left\{\begin{aligned}
&(S-x)\,dx + (S-y)\,dy + (S-z)\,dz + (S-u)\,du \\
&\quad = S(dx+dy+dz+du) - x\,dx - y\,dy - z\,dz - u\,du \\
&\quad = S\,dS - x\,dx - y\,dy - z\,dz - u\,du \\
&\quad = d\frac{S^2}{2} - d\frac{x^2}{2} - d\frac{y^2}{2} - d\frac{z^2}{2} - d\frac{u^2}{2} = d\,\frac{S^2-(x^2+y^2+z^2+u^2)}{2},
\end{aligned}\right.$$

et il viendra, par une intégration immédiate,

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned}
&\textstyle\int[(y+z+u)\,dx \\
&\quad + (z+u+x)\,dy + (u+x+y)\,dz + (x+y+z)\,du] \\
&\qquad = \frac{(x+y+z+u)^2-(x^2+y^2+z^2+u^2)}{2} + \text{const.} \\
&\qquad = xy + xz + xu + yz + yu + zu + \text{const.}
\end{aligned}\right.$$

220*. — De l'intégrabilité des différentielles totales implicites.

(Compléments, p. 1*.)

VINGT-DEUXIÈME LEÇON.

PROCÉDÉS GÉNÉRAUX POUR LE CALCUL DES INTÉGRALES INDÉFINIES.

221. — Des règles servant à intégrer en termes finis une différentielle de la forme $f(x)dx$.

On est très loin de pouvoir calculer exactement, ou même de savoir exprimer en termes finis, au moyen des fonctions connues, l'intégrale d'une différentielle quelconque de la forme $f(x)\,dx$, soit algébrique, soit surtout transcendante. Il faut d'ailleurs, pour que des tentatives dans ce sens aboutissent, que la quantité représentée par l'intégrale se trouve, en effet, réductible aux fonctions simples de l'analyse; ce qui n'a lieu qu'assez rarement, sans qu'on ait même toujours des moyens sûrs de le discerner. Et dans les cas où une telle réduction ne s'effectue pas, c'est un problème en général très ardu, que de reconnaître les intégrales d'une même famille, ou exprimables les unes par les autres, et de les ramener aux moins complexes d'entre elles, dont il reste ensuite à opérer le calcul numérique et à composer des tables, par des développements en séries, ou autrement, comme on l'a fait pour la fonction logarithmique et pour les fonctions circulaires.

Nous nous bornerons ici, presque entièrement, aux principales des catégories de différentielles qui s'intègrent à l'aide des fonctions familières à tous les géomètres, les unes algébriques, les autres exponentielles ou circulaires, tant directes qu'inverses. Cette recherche sera basée sur l'emploi de cinq règles constituant, en quelque sorte, cinq procédés spéciaux d'intégration, que nous allons exposer.

222. — Première règle, concernant les différentielles qui s'intègrent immédiatement.

Cette règle consiste à connaître par cœur et à appliquer les intégrations suivantes, qui résultent, sans calcul ou presque sans calcul, des formules usuelles de différentiation des fonctions les plus simples, et

où c, c' désignent des constantes arbitraires :

$$
(1)\quad \left\{
\begin{array}{l}
\int x^m\, dx = \dfrac{x^{m+1}}{m+1} + c \text{ (} m \text{ étant un exposant constant quelconque,} \\
\quad \text{positif ou négatif, entier ou fractionnaire),} \\
\qquad \displaystyle\int \frac{dx}{x} = \log x + c', \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tang}\, x + c, \\
\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc}\sin x + c \left(\text{quand arc}\sin x \text{ est compris entre } -\frac{\pi}{2} \text{ et } \frac{\pi}{2}\right), \\
\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pm \text{arc}\sin x + c = \mp \text{arc}\cos x + c' \text{ (quand les arcs sont} \\
\quad \text{quelconques),} \\
\int e^x dx = e^x + c, \quad \int \cos x\, dx = \sin x + c, \quad \int \sin x\, dx = -\cos x + c, \\
\qquad \displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tang}\, x + c, \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c.
\end{array}
\right.
$$

On vérifie l'exactitude de toutes ces formules en observant que les seconds membres ont bien pour différentielles les quantités placées sous le signe $\int$ dans les premiers membres.

Faisons les remarques suivantes :

1° *L'intégrale de $x^m dx$ s'obtient en ajoutant algébriquement 1 à l'exposant de la variable et en divisant par son nouvel exposant la puissance ainsi obtenue.* Par exemple, la différentielle $\dfrac{dx}{\sqrt{x}}$ s'écrira d'abord $x^{-\frac{1}{2}}dx$ et donnera

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{x} + c.$$

2° Cette intégrale $\int x^m dx$ prend ainsi la forme *illusoire* (c'est-à-dire incertaine ou obscure) $\dfrac{x^0}{0} + c = \dfrac{1}{0} + c$ dans le cas particulier $m = -1$; et c'est pour suppléer à l'insuffisance de la formule générale dans ce cas qu'est donnée la seconde formule, $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \log x + c'$. La véritable intégrale, contenant alors la fonction *transcendante* $\log x$, ne pouvait, en effet, être représentée *distinctement* par une expression *algébrique,* telle que $\dfrac{x^{m+1}}{m+1} + c$. Elle ne constitue cependant qu'un

cas extrême ou *limite* de celle-ci, comme on le reconnaît en posant non pas, tout de suite, $m=-1$, mais $m=-1+\frac{1}{n}$, et en faisant croître indéfiniment n pour que m tende vers -1. Alors le monôme $\frac{x^{m+1}}{m+1}$ devient $nx^{\frac{1}{n}}=n\sqrt[n]{x}$; et sa partie variable avec x est identique à celle de l'expression $n\sqrt[n]{x}-n=n(\sqrt[n]{x}-1)$, qui tend vers $\log x$ (t. I, p. 51) quand n y grandit indéfiniment en valeur absolue. Donc il suffit de poser $c=-n+c'$ pour voir la forme algébrique $n\sqrt[n]{x}+c$ ou $\frac{x^{m+1}}{m+1}+c$, nécessairement insuffisante quand $m=-1$, donner alors naissance à la forme transcendante $\log x+c'$.

3° Dans la cinquième formule, concernant $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, une même intégrale se trouve exprimée, à volonté, soit par $\pm\operatorname{arc}\sin x+c$, soit par $\mp\operatorname{arc}\cos x+c'$. Et, en effet, le sinus d'un arc étant le cosinus de son complément, les deux arcs $\operatorname{arc}\sin x$, $\operatorname{arc}\cos x$, qui ont respectivement x pour sinus et pour cosinus, égalent en somme $\frac{\pi}{2}$; de sorte qu'on a

$$\operatorname{arc}\sin x=-\operatorname{arc}\cos x+\frac{\pi}{2}$$

et que les deux fonctions $\operatorname{arc}\sin x$, $-\operatorname{arc}\cos x$ diffèrent seulement par la constante $\frac{\pi}{2}$ ou sont parfaitement équivalentes en ce qui concerne leur partie variable, seule à considérer dans une intégrale indéfinie.

4° Enfin, la comparaison des diverses formules du tableau précédent montre que les différentielles algébriques, comme, par exemple, $x^m\,dx$, $\frac{dx}{x}$, $\frac{dx}{1+x^2}$, $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, ont pour intégrales, les unes, des fonctions algébriques, les autres des fonctions transcendantes (qui sont ici des fonctions inverses d'exponentielles, de tangentes ou de sinus); tandis que les différentielles transcendantes ont toujours leurs intégrales transcendantes, comme on pouvait le prévoir en observant que la dérivée d'une fonction algébrique est toujours algébrique et que, par suite, nulle fonction algébrique ne saurait être l'intégrale d'une fonction transcendante.

Donc, *l'intégration, bien supérieure en cela, pour la variété des cas, à la différentiation, est une opération qui introduit fréquemment des fonctions transcendantes, quand les expressions d'où l'on*

part sont algébriques, et qui est par conséquent propre à définir ou à faire connaître de nouvelles transcendantes.

223*. — Extension, au cas de différences finies, de certaines des précédentes formules de sommation : factorielles, progressions arithmétiques et leurs sommes successives.

(Compléments, p. 8*.)

224*. — Suite : sommation des progressions géométriques à termes soit réels, soit imaginaires, ce qui comprend celle de sinus ou cosinus d'arcs équidistants; différentielle d'une exponentielle imaginaire, etc.

(Compléments, p. 11*.)

225. — Deuxième règle : intégration d'une somme ou d'une différence.

L'intégrale de la somme ou de la différence de divers termes égale la somme ou la différence des intégrales de ces termes.

Je dis, par exemple, qu'on aura

$$\int[f(x)+\varphi(x)-\psi(x)]\,dx=\int f(x)\,dx+\int\varphi(x)\,dx-\int\psi(x)\,dx.$$

En effet, la différentielle d'une somme algébrique s'obtient en différentiant chaque terme : donc celle du second membre sera

$$d\int f(x)\,dx+d\int\varphi(x)\,dx-d\int\psi(x)\,dx,$$

c'est-à-dire

$$f(x)\,dx+\varphi(x)\,dx-\psi(x)\,dx=[f(x)+\varphi(x)-\psi(x)]\,dx,$$

différentielle qui est bien la quantité à intégrer, placée sous le signe $\int$ dans le premier membre.

226. — Troisième règle : transport des facteurs constants hors du signe $\int$.

L'intégrale du produit d'un facteur constant par un facteur variable s'obtient en faisant sortir le facteur constant du signe de l'intégration, c'est-à-dire en multipliant par ce facteur constant l'intégrale du facteur variable.

Je dis que, si a, par exemple, désigne un facteur constant, on aura

$$\int a\,f(x)\,dx=a\int f(x)\,dx.$$

La raison en est que la différentielle du produit d'un facteur constant, a, par un facteur variable, $\int f(x)\,dx$, égale le produit du fac-

teur constant par la différentielle, $f(x)\,dx$, du facteur variable et n'est autre, en conséquence, que $af(x)\,dx$. Ainsi, le second membre exprime bien l'intégrale $\int af(x)\,dx$, puisqu'il a pour différentielle $af(x)\,dx$.

Observons qu'il est inutile d'ajouter explicitement au second membre, tant dans cette formule que dans celle du numéro précédent, la constante arbitraire que comporte toute intégrale indéfinie; car ce second membre contient lui-même l'indication d'une intégration indéfinie qui, dans chaque cas particulier où on l'effectuera, introduira la constante voulue.

227. — Application des trois règles précédentes aux différentielles de forme entière.

Les trois règles précédentes suffisent pour intégrer une foule de différentielles, très importantes, notamment celles qui sont de la forme $(Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + \ldots)\,dx$, A, B, C, ..., α, β, γ, ... désignant des quantités constantes quelconques. L'application de la deuxième règle donne d'abord, pour l'intégrale de cette expression,

$$\int Ax^\alpha\,dx + \int Bx^\beta\,dx + \int Cx^\gamma\,dx + \ldots,$$

formule que la troisième règle transforme en celle-ci

$$A\int x^\alpha\,dx + B\int x^\beta\,dx + C\int x^\gamma\,dx + \ldots.$$

Enfin, la première règle, d'après laquelle l'intégrale $\int x^m\,dx$ vaut $\frac{x^{m+1}}{m+1}$, achève de conduire au résultat, et il vient

$$\left\{\begin{aligned} &\int (Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + \ldots)\,dx \\ &\quad = A\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + B\frac{x^{\beta+1}}{\beta+1} + C\frac{x^{\gamma+1}}{\gamma+1} + \ldots + \text{const.}\end{aligned}\right.$$

228*. — Sommation des différences finies exprimées par une fonction entière d'une variable dont les valeurs successives sont équidistantes; application à des sommes de carrés et de cubes.

(Compléments, p. 18*.)

229. — Quatrième règle : intégration par substitution.

La quatrième règle, relative à ce qu'on appelle le procédé d'*intégration par substitution*, consiste à remplacer la variable x, entrant dans la différentielle donnée $f(x)\,dx$, par une nouvelle variable, t, liée à x, et choisie de manière à simplifier assez cette différentielle

pour la rendre intégrable au moyen des autres règles ou procédés. Appelons, en effet, t une fonction quelconque de x, et donnons-nous, sous la forme $x = \varphi(t)$, la relation qui la définira. Si dt désigne l'accroissement de t correspondant à un accroissement infiniment petit dx de x, on déduira, de $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t)dt$; et il viendra

$$f(x)dx = f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

Une même différentielle recevra donc une infinité d'expressions différentes, suivant la nouvelle variable t qu'on y introduira; et il pourra bien se faire que, parmi ces expressions, inégalement compliquées, quelqu'une soit intégrable. Il est vrai que, si la première variable x se trouve donnée comme indépendante et a toutes ses différentielles successives dx égales, la nouvelle, t, ne variera généralement pas d'une manière aussi simple. Mais l'intégration, se distinguant, en cela, d'une sommation de différences finies, n'en est rendue ni plus, ni moins difficile; car la différentielle d'une fonction $F(t)$ est aussi bien $F'(t)\,dt$ quand t dépend, suivant une loi continue quelconque, d'une ou de plusieurs variables, que lorsque t est indépendant.

Supposons donc que l'intégrale de $f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$ puisse être obtenue, et appelons-la $F(t)$. On aura

$$\int f(x)\,dx = F(t) + \text{const.};$$

et il ne restera plus qu'à remplacer, dans le résultat, t par sa valeur en x tirée de l'équation de condition $x = \varphi(t)$.

230. — Premier exemple : intégration d'un produit de la forme
$$\cos(ax+b)\cos(a'x+b')\cos(a''x+b'')\ldots dx.$$

Comme premier exemple de l'intégration par substitution, considérons une différentielle de la forme $f(ax+b)\,dx$, f désignant une fonction quelconque et a, b deux constantes ou $ax+b$ une fonction linéaire. Prenons le binôme $ax+b$ pour nouvelle variable, en posant

$$ax+b=t; \qquad \text{d'où} \qquad x=\frac{t-b}{a} \qquad \text{et} \qquad dx=\frac{dt}{a}.$$

La différentielle $f(ax+b)dx$ deviendra $\frac{1}{a}f(t)dt$, et il suffira, comme on voit, de savoir intégrer l'expression $f(t)\,dt$ pour que la proposée s'intègre elle-même.

Supposons, par exemple, que $f(ax+b)$ soit le cosinus ou le sinus d'une fonction linéaire de x. On pourra, pour fixer les idées, admettre

toujours que ce soit un cosinus; car, si c'était un sinus, on poserait $\sin(ax+b)=\cos\left(ax+b-\frac{\pi}{2}\right)$, expression où $ax+b-\frac{\pi}{2}$ est, comme $ax+b$, une fonction linéaire, dans laquelle seulement le terme constant b se trouve diminué de $\frac{\pi}{2}$. On aura donc, dans les deux cas, à intégrer une différentielle comme

$$\cos(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}\cos t\,dt=d\,\frac{\sin t}{a}=d\,\frac{\sin(ax+b)}{a};$$

en sorte que le résultat sera

$$(21)\qquad \int\cos(ax+b)\,dx=\frac{\sin(ax+b)}{a}+\text{const.}$$

On ramène à la différentielle $\cos(ax+b)dx$ tout produit de dx par un nombre quelconque de sinus ou cosinus d'arcs fonctions linéaires de x. Supposons, en effet, qu'on mette un tel produit sous la forme

$$\cos(ax+b)\cos(a'x+b')\cos(a''x+b'')\ldots dx.$$

En appliquant la formule trigonométrique connue

$$\cos p\cos q=\frac{1}{2}\cos(p+q)+\frac{1}{2}\cos(p-q)$$

au produit des deux premiers facteurs $\cos(ax+b)$ et $\cos(a'x+b')$, on remplacera ce produit par la demi-somme des cosinus des arcs

$$(a+a')x+(b+b'),\quad (a-a')x+(b-b'),$$

lesquels sont linéaires comme les proposés. Chacun des termes ainsi obtenus, multiplié à son tour par le facteur suivant $\cos(a''x+b'')$, donnera des termes encore de même forme; et ainsi de suite. Finalement, le produit de tous les cosinus donnés se trouvera transformé en une somme de termes dont chacun égalera, à un facteur constant près, un cosinus de même forme. L'intégration proposée sera donc ramenée à celle d'expressions telles que $\cos(\mathrm{A}x+\mathrm{B})dx$, dont l'intégrale est, comme on sait, $\frac{\sin(\mathrm{A}x+\mathrm{B})}{\mathrm{A}}$.

231. — Deuxième exemple : intégration de $\frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$.

Soit, comme deuxième exemple, l'expression $\frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$, où α et β désignent deux constantes quelconques. De toutes les différentielles

simples que la première règle permet d'intégrer, celle qui se rapproche le plus de la proposée est visiblement $\frac{dx}{x^2+1}$ ou, en changeant le nom de la variable, $\frac{dt}{t^2+1}$, dont l'intégrale est arc tang t. Cherchons donc si, par une substitution convenable, nous ne pourrions pas ramener notre différentielle à celle-ci. Et d'abord, nous réduirons le terme constant, β^2, du dénominateur, à la valeur 1 que nous nous proposons de lui faire acquérir dans la transformation, si nous mettons, au dénominateur, β^2 en facteur commun; ce qui nous donnera

$$\frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{1}{\beta^2}\,\frac{dx}{\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2+1}.$$

Nous voyons actuellement, en laissant de côté le facteur constant $\frac{1}{\beta^2}$, que le dénominateur sera, comme nous le désirons, t^2+1, si nous posons

$$t=\frac{x-\alpha}{\beta};\qquad \text{d'où}\qquad x-\alpha=\beta t\qquad \text{et}\qquad dx=\beta\,dt.$$

Donc la différentielle proposée devient

$$\frac{1}{\beta^2}\,\frac{\beta\,dt}{t^2+1} = \frac{1}{\beta}\,\frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{\beta}\,d\,\text{arc tang}\,t = \frac{1}{\beta}\,d\,\text{arc tang}\,\frac{x-\alpha}{\beta};$$

et l'on a, finalement,

$$(22)\qquad \int\frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{1}{\beta}\,\text{arc tang}\,\frac{x-\alpha}{\beta} + \text{const.}$$

232. — Troisième exemple : intégration de $\frac{dx}{\sqrt{\beta^2-(x-\alpha)^2}}$.

Ici, nous remarquons que l'expression donnée, $\frac{dx}{\sqrt{\beta^2-(x-\alpha)^2}}$, se rapproche assez, pour la forme, de $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, ou de $\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, dont l'intégrale est arc sin t quand l'arc qui y figure se trouve compris, comme nous le supposerons, entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. Nous mettrons en facteur commun, ainsi que nous l'avons fait dans l'exemple précédent, le terme β^2 auquel nous désirons substituer l'unité; et il viendra

$$\frac{dx}{\sqrt{\beta^2-(x-\alpha)^2}} = \frac{1}{\beta}\,\frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2}}.$$

Nous poserons donc encore $\frac{x-\alpha}{\beta}=t$, $dx=\beta\,dt$; ce qui réduira notre différentielle à $\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ ou à $d\arcsin t$. Et l'intégrale demandée sera

$$(23)\qquad \int\frac{dx}{\sqrt{\beta^2-(x-\alpha)^2}}=\arcsin\frac{x-\alpha}{\beta}-\text{const}.$$

233. — Quatrième exemple : différentielles de la forme $f(\sin x, \cos x)\,dx$.

Un changement de variables permet souvent de rendre algébrique une différentielle transcendante. Par exemple, une expression de la forme $f(\sin x, \cos x)\,dx$, où f désigne une fonction rationnelle de $\sin x$ et de $\cos x$, devient une différentielle algébrique et même rationnelle quand on adopte, pour nouvelle variable t, la tangente de $\frac{x}{2}$. En effet, la relation $\operatorname{tang}\frac{x}{2}=t$ donne

$$\left\{\begin{aligned}
&\cos\frac{x}{2}=\pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\frac{x}{2}}}=\pm\frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\\
&\sin\frac{x}{2}=\pm\frac{\operatorname{tang}\frac{x}{2}}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\frac{x}{2}}}=\pm\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\\
&\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\frac{2t}{1+t^2},\qquad \cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-t^2}{1+t^2};
\end{aligned}\right.$$

et d'ailleurs, en différentiant cette même relation $\operatorname{tang}\frac{x}{2}=t$, il vient

$$\frac{\frac{1}{2}dx}{\cos^2\frac{x}{2}}=dt,\qquad \text{d'où}\qquad dx=2\cos^2\frac{x}{2}\,dt=\frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

On aura donc

$$(24)\qquad f(\sin x, \cos x)\,dx=f\left(\frac{2t}{1+t^2},\ \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2\,dt}{1+t^2},$$

différentielle rationnelle en t et qu'on pourra toujours intégrer par des procédés dont il sera parlé dans la prochaine Leçon.

Mais divers artifices dispensent souvent de recourir à cette substitution assez compliquée de $\operatorname{tang}\frac{x}{2}$ à x dans le rôle de variable.

Soit, par exemple, l'expression $\frac{dx}{1+a\cos^2 x}$. En la divisant *haut et bas* par $\cos^2 x$, elle deviendra $\frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{a+\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{d\tang x}{a+1+\tang^2 x}$. Si donc on pose ici $\tang x = t$ et $a+1=\beta^2$, la différentielle à intégrer sera $\frac{dt}{\beta^2+t^2}$. Elle se trouve comprise dans celle-ci, déjà étudiée (n° 231, p. 24), $\frac{dt}{(t-\alpha)^2+\beta^2}$, dont l'intégrale est $\frac{1}{\beta}\operatorname{arc\,tang}\frac{t-\alpha}{\beta}$. Par suite, on aura, pour l'intégrale cherchée, $\frac{1}{\beta}\operatorname{arc\,tang}\frac{t}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{a+1}}\operatorname{arc\,tang}\frac{t}{\sqrt{a+1}}$ ou enfin, en ajoutant d'ailleurs une constante arbitraire,

$$\int \frac{dx}{1+a\cos^2 x} = \frac{1}{\sqrt{a+1}}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\tang x}{\sqrt{a+1}}\right) + \text{const.} \tag{25}$$

Soit encore la différentielle $\sin^m x \cos^n x\, dx$, où m et n désignent deux exposants entiers, positifs ou négatifs. Nous verrons bientôt comment on peut ramener son intégration à celle d'une différentielle de même forme, mais dans laquelle chacun des deux nombres m, n a les valeurs les plus simples possibles, qui sont zéro, 1, ou -1. Or voici comment on l'intègre directement, pour ces valeurs de m, n, sans recourir à la transformation générale consistant à prendre dès l'abord $\tang\frac{x}{2}$ pour nouvelle variable. Suivant que m est nul, égal à 1, ou égal à -1, on a les trois types $\cos^n x\, dx$, $\sin x \cos^n x\, dx$, $\frac{\cos^n x\, dx}{\sin x}$, dont chacun se subdivise lui-même en trois puisque n peut y être ou zéro, ou 1, ou -1; et les différentielles à intégrer, rangées par ordre de difficulté croissante (comme on va voir), sont

$$\left\{\begin{array}{l} dx,\quad \cos x\, dx,\quad \sin x\, dx,\quad \sin x\cos x\, dx, \\ \frac{\cos x\, dx}{\sin x},\quad \frac{\sin x\, dx}{\cos x},\quad \frac{dx}{\sin x\cos x},\quad \frac{dx}{\sin x},\quad \frac{dx}{\cos x}. \end{array}\right. \tag{26}$$

Les trois premières ont pour intégrales, respectivement, x, $\sin x$, $-\cos x$. La quatrième et la cinquième, si l'on y pose $\sin x = t$ (d'où $\cos x\, dx = dt$), deviennent $t\,dt$, $\frac{dt}{t}$: leurs intégrales sont donc $\frac{t^2}{2}$, $\log t$, c'est-à-dire $\frac{1}{2}\sin^2 x$, $\log\sin x$. La sixième, en y faisant $\cos x = t$ (d'où $\sin x\, dx = -dt$), devient de même $-\frac{dt}{t}$ et a pour intégrale

$-\log t$, ou $-\log\cos x$. La septième, $\frac{dx}{\sin x \cos x}$, si l'on divise les deux termes de la fraction par $\cos^2 x$, prend la forme

$$\frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{d\operatorname{tang} x}{\operatorname{tang} x} = d\log\operatorname{tang} x,$$

et elle a, par suite, pour intégrale, $\log\operatorname{tang} x$. La huitième, $\frac{dx}{\sin x}$, en y posant $x = 2t$ (d'où $dx = 2\,dt$), devient $\frac{2\,dt}{\sin 2t} = \frac{dt}{\sin t \cos t}$; ce qui la ramène à la forme de la précédente et donne comme intégrale $\log\operatorname{tang} t$ ou $\log\operatorname{tang}\frac{x}{2}$. Enfin la neuvième et dernière, $\frac{dx}{\cos x}$, équivaut à $\frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)} = \frac{d\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}{d\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}$, c'est-à-dire à $\frac{dt}{\sin t}$ si l'on prend $t = \frac{\pi}{2} + x$; et celle-ci, étant de la forme $\frac{dx}{\sin x}$, a l'intégrale

$$\log\operatorname{tang}\frac{t}{2} = \log\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right).$$

Ainsi, il suffira bien, pour pouvoir intégrer l'expression

$$\sin^m x \cos^n x\, dx,$$

quand m et n égaleront des entiers quelconques, de la ramener aux cas où chacun de ces exposants aura l'une des deux valeurs absolues 0, 1.

234. — Cinquième règle : intégration par parties.

Enfin, une des grandes ressources du Calcul intégral est ce qu'on appelle l'*intégration par parties*. Ce procédé, que Fermat et Pascal, dès le milieu du XVIIe siècle, c'est-à-dire avant l'organisation même de l'Analyse infinitésimale par Leibnitz, connaissaient déjà et employaient fréquemment, s'applique à des différentielles dont l'intégration n'est empêchée que par la présence d'un facteur variable, dit *facteur non intégré;* il permet de réduire l'intégrale cherchée à une autre souvent plus simple. Voici en quoi il consiste.

Supposons que la différentielle donnée soit de la forme $\varphi(x) f(x)\,dx$, et que le facteur $\varphi(x)$, seul, fasse obstacle à la sommation, ou, ce qui revient au même, que le produit $f(x)\,dx$ des autres facteurs égale la

différentielle d'une fonction connue de x. Désignons par v cette fonction, intégrale de $f(x)\,dx$; et appelons-la *facteur intégré*, par opposition au facteur *non intégré* $\varphi(x)$, que nous désignerons de même par u. L'expression donnée $\varphi(x)f(x)\,dx$ étant ainsi mise sous la forme $u\,dv$, la règle de l'intégration par parties consiste à prendre $\int u\,dv = uv - \int v\,du$, et s'énonce en disant que *l'intégrale cherchée égale le produit du facteur non intégré par le facteur intégré, moins l'intégrale de ce facteur intégré multiplié par la différentielle du facteur non intégré*. En effet, l'expression $uv - \int v\,du$ est bien l'intégrale de $u\,dv$, puisque sa différentielle, $d(uv) - v\,du$, ou $(u\,dv + v\,du) - v\,du$, se réduit identiquement à $u\,dv$.

Le calcul de $\int u\,dv$ se trouvera donc ramené à celui de $\int v\,du$. Observons d'ailleurs, comme nous l'avons fait dans une circonstance analogue (p. 21), qu'il est ordinairement inutile d'ajouter au second membre $uv - \int v\,du$ une constante arbitraire, vu qu'une telle constante se trouve déjà implicitement contenue dans le terme $-\int v\,du$.

233. — Premier exemple : différentielles transcendantes se ramenant à d'autres algébriques; application à $\int x^m \log x\,dx$ et à $\int x^m(\log x)^n\,dx$.

Parmi les cas où l'intégration par parties a chance de réussir, un des plus remarquables est celui où, le facteur intégré v se trouvant algébrique, le facteur non intégré u est *une fonction transcendante*, mais *de celles qui ont leur dérivée algébrique*, comme $\log x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arc\,tang} x$, ... Car alors la différentielle proposée $u\,dv$ est *transcendante*, tandis que celle à laquelle on la ramène, $v\,du$, est *algébrique*.

Soit, par exemple, l'expression $x^m \log x\,dx$, immédiatement intégrable dans le cas unique $m = -1$ où elle équivaut à

$$\log x\,d\log x = d\frac{(\log x)^2}{2}.$$

Ce cas $m = -1$ étant ainsi écarté, on voit de suite que le facteur $\log x$ empêche seul d'intégrer, puisque, sans ce facteur, on aurait $x^m\,dx = d\frac{x^{m+1}}{m+1}$ et que l'intégrale serait $\frac{x^{m+1}}{m+1}$. On posera donc

$$\int x^m \log x\,dx = \int \log x\,d\frac{x^{m+1}}{m+1} = \frac{1}{m+1}\int \log x\,d.x^{m+1},$$

et, par suite, abstraction faite du facteur constant $\frac{1}{m+1}$, $u = \log x$, $v = x^{m+1}$; d'où $du = \frac{dx}{x}$, $v\,du = x^m\,dx$. Ainsi, il viendra successi-

vement

$$(27) \quad \begin{cases} \int x^m \log x \, dx = \dfrac{1}{m+1} x^{m+1} \log x - \dfrac{1}{m+1} \int x^m \, dx \\ \qquad = \dfrac{x^{m+1}}{m+1}\left(\log x - \dfrac{1}{m+1}\right) + \text{const.} \end{cases}$$

Le même procédé, mais répété, pourrait encore aboutir, si le facteur non intégré u était une fonction entière quelconque d'une transcendante à dérivée algébrique; car cette fonction entière se trouverait évidemment remplacée, dans la nouvelle différentielle $v\,du$, par sa dérivée, dont le degré est moindre de 1 que le sien; puis le même genre de réduction, s'il était applicable à $\int v\,du$, abaisserait d'une deuxième unité l'exposant le plus élevé de la transcendante, et ainsi de suite, jusqu'à réduction du degré à zéro ou de la fonction à un simple facteur constant.

Par exemple, $\int x^m (\log x)^n \, dx$, sauf encore dans le cas $m = -1$ où $x^m (\log x)^n \, dx = (\log x)^n \, d\log x$ est immédiatement intégrable, s'écrira $\dfrac{1}{m+1} \int (\log x)^n \, d.x^{m+1}$; et, en posant $(\log x)^n = u$, $x^{m+1} = v$ [d'où $v\,du = n x^m (\log x)^{n-1} \, dx$], il viendra

$$(28) \quad \int x^m (\log x)^n \, dx = \frac{x^{m+1} (\log x)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1} \int x^m (\log x)^{n-1} \, dx.$$

L'intégration de $x^m (\log x)^n \, dx$ se trouve donc ramenée à celle de la différentielle de même forme $x^m (\log x)^{n-1} \, dx$, où l'exposant de $\log x$ est moindre de 1. Il est clair que, si n a une valeur entière et positive, n intégrations analogues par parties la réduiront à $x^m \, dx$ ou permettront de l'intégrer.

236. — Deuxième exemple : calcul de $\int f(x) e^x dx$, $\int f(x) \cos x \, dx$, $\int f(x) \sin x \, dx$.

Quand la différentielle proposée contient encore un facteur transcendant, mais ayant sa fonction primitive facile à obtenir, il peut y avoir avantage à prendre celle-ci comme facteur intégré, pourvu que, d'ailleurs, le facteur non intégré ait sa dérivée assez simple.

Soient, comme exemples, les expressions

$$\int f(x) e^x \, dx, \quad \int f(x) \cos x \, dx, \quad \int f(x) \sin x \, dx,$$

où les facteurs transcendants e^x, $\cos x$, $\sin x$ ont pour fonctions primitives e^x, $\sin x$, $-\cos x$, et où la dérivée de l'autre facteur $f(x)$ sera

plus simple qu'il ne l'est lui-même, si on le suppose fonction entière de x.

En posant donc $u = f(x)$ [d'où $du = f'(x)\,dx$], et $v =$ soit e^x, soit $\sin x$, soit $-\cos x$, il viendra

$$
(29)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\int f(x)e^x\,dx = f(x)e^x - \int f'(x)e^x\,dx,\\
&\int f(x)\cos x\,dx = f(x)\sin x - \int f'(x)\sin x\,dx,\\
&\int f(x)\sin x\,dx = -f(x)\cos x + \int f'(x)\cos x\,dx.
\end{aligned}
\right.
$$

On voit que les trois intégrales proposées sont ramenées à d'autres de mêmes formes, mais où le polynôme $f(x)$, d'un certain degré m, se trouve remplacé par sa dérivée, dont le degré n'est plus que $m-1$. Le même procédé, appliqué à ces nouvelles intégrales, les réduira pareillement à d'autres où le polynôme placé sous le signe $\int$, $f''(x)$, ne sera plus que du degré $m-2$; et ainsi de suite, jusqu'à ce que, après m opérations, le polynôme étant devenu $f^{(m)}(x)$, c'est-à-dire un simple facteur constant, et pouvant dès lors sortir du signe $\int$, les expressions, restées sous ce signe, $e^x\,dx$ et $\cos x\,dx$ ou $\sin x\,dx$, soient immédiatement intégrables.

Observons que, si, dans les intégrales $\int f(x)e^x\,dx$, $\int f(x)\cos x\,dx$, $\int f(x)\sin x\,dx$, on pose soit $e^x = t$, soit $\sin x = t$, soit $\cos x = t$ (d'où $x =$ soit $\log t$, soit $\arcsin t$, soit $\arccos t$). elles prennent les formes respectives $\int f(\log t)\,dt$, $\int f(\arcsin t)\,dt$, $-\int f(\arccos t)\,dt$. Celles-ci sont donc elles-mêmes évaluables d'une manière finie, comme il était du reste évident pour la première, composée de termes de la forme $\mathrm{A}\int (\log x)^n\,dx$ qu'on vient d'intégrer.

237. — Troisième exemple : réduction de $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$.

Nous avons vu tout à l'heure (pp. 26 et 27) comment l'expression $\sin^m x \cos^n x\,dx$ s'intègre quand les exposants m, n sont ou nuls, ou égaux à l'unité en valeur absolue. Il suffira donc, si l'on veut calculer l'intégrale $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$ pour tous les cas où m, n sont entiers, de la ramener à d'autres de même forme, mais où les exposants aient deux unités de moins en valeur absolue; car ce genre de réduction, appliqué un nombre suffisant de fois, rendra finalement les entiers m et n moindres que 2 en valeur absolue, c'est-à-dire égaux, chacun, à zéro, à $+1$, ou à -1. Or on y arrive, justement, au moyen de l'intégration par parties.

Supposons, par exemple, qu'on veuille réduire de deux unités l'exposant du sinus. Alors on prendra pour facteur non intégré $\sin^{m-1} x$

et, conséquemment, pour facteur intégré,

$$\int \sin x \cos^n x\,dx = -\int \cos^n x\,d\cos x = -\frac{\cos^{n+1} x}{n+1}.$$

Il viendra successivement

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} \int \sin^m x \cos^n x\,dx &= -\frac{1}{n+1}\int \sin^{m-1} x\,d\cos^{n+1} x \\ &= -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{1}{n+1}\int \cos^{n+1} x\,d\sin^{m-1} x \\ &= -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1}\int \sin^{m-2} x \cos^{n+2} x\,dx. \end{aligned}\right.$$

Cette relation ramène, comme on voit, $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$ à

$$\int \sin^{m-2} x \cos^{n+2} x\,dx;$$

mais, quand on la résout par rapport à l'intégrale

$$\int \sin^{m-2} x \cos^{n+2} x\,dx,$$

elle ramène, au contraire, celle-ci à la première, $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$. Donc si, dans la proposée, les exposants diffèrent de signe et sont tous les deux égaux ou supérieurs à 2 en valeur absolue, on les réduira de deux unités par l'application de la formule (30), soit prise sous sa forme (30) si l'exposant du sinus est positif et, celui du cosinus, négatif, soit résolue par rapport à $\int \sin^{m-2} x \cos^{n+2} x\,dx$, et transformée par les changements de $m-2$ en m et de $n+2$ en n, dans le cas opposé de m négatif et n positif.

Mais, quand, au contraire, les exposants m, n ont même signe, ou signes différents avec des valeurs absolues ne dépassant pas toutes les deux l'unité, il y a lieu de réduire l'un quelconque d'entre eux pourvu qu'il soit supérieur à 1, sans toucher à l'autre. Supposons, par exemple, que ce soit l'exposant du sinus qu'on veuille diminuer de deux unités. Il suffira de remplacer, dans le dernier terme de (30), $\cos^{n+2} x$ par $\cos^n x(1-\sin^2 x)$, ou de dédoubler ce terme en les deux suivants, $\frac{m-1}{n+1}\int \sin^{m-2} x \cos^n x\,dx$ et $-\frac{m-1}{n+1}\int \sin^m x \cos^n x\,dx$, puis, de faire passer le nouveau dernier terme dans le premier membre pour le joindre au terme semblable qui s'y trouve déjà. En multipliant enfin toute l'égalité par $n+1$, il viendra la formule

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned} &(m+n)\int \sin^m x \cos^n x\,dx \\ &\qquad = -\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x + (m-1)\int \sin^{m-2} x \cos^n x\,dx, \end{aligned}\right.$$

qui, pour m positif, ramènera $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$ à $\int \sin^{m-2} x \cos^n x\,dx$

et qui, pour m et $m-2$ négatifs, permettra de ramener, au contraire, l'intégrale $\int \sin^{m-2} x \cos^n x\,dx$ à $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$, où la valeur absolue de l'exposant du sinus se trouvera également diminuée de deux unités.

On réduirait l'exposant du cosinus en opérant de même, après avoir pris, dans $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$, pour facteur non intégré, $\cos^{n-1} x$ et, pour facteur intégré, $\int \sin^m x \cos x\,dx = \frac{\sin^{m+1} x}{m+1}$, puis en remplaçant, dans l'intégrale obtenue au second membre, $\sin^{m+2} x$ par $\sin^m x(1-\cos^2 x)$.

Supposons, par exemple, que $n=0$ et que m soit un nombre entier positif supérieur à 1. Alors la formule (31), divisée par m, deviendra

$$(32)\qquad \int \sin^m x\,dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos x}{m} + \frac{m-1}{m}\int \sin^{m-2} x\,dx.$$

Elle permettra, comme on voit, d'abaisser successivement l'exposant m d'autant de fois deux unités qu'on le voudra, de manière à le réduire finalement à zéro ou à 1; et alors l'expression à intégrer, dx ou $\sin x\,dx$, donnera soit $\int dx = x + c$, soit $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$

238. — Quatrième exemple : calcul de $\int e^{-ax} \cos bx\,dx$ et de $\int e^{-ax} \sin bx\,dx$.

Pour abréger, appelons I la première des intégrales proposées, $\int e^{-ax} \cos bx\,dx$, et J la seconde, $\int e^{-ax} \sin bx\,dx$. Prenons-y, pour facteur non intégré, $\cos bx$, dans la première, $\sin bx$, dans la deuxième, et, par suite, dans les deux cas, pour facteur intégré,

$$\int e^{-ax}\,dx = -\frac{e^{-ax}}{a}.$$

Nous aurons donc successivement, en multipliant par a,

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned} a\mathrm{I} &= -\int \cos bx\,de^{-ax} = -e^{-ax}\cos bx + \int e^{-ax}\,d\cos bx \\ &= -e^{-ax}\cos bx - b\int e^{-ax}\sin bx\,dx, \\ a\mathrm{J} &= -\int \sin bx\,de^{-ax} = -e^{-ax}\sin bx + \int e^{-ax}\,d\sin bx \\ &= -e^{-ax}\sin bx + b\int e^{-ax}\cos bx\,dx. \end{aligned}\right.$$

Les intégrales sur lesquelles on tombe dans les derniers membres ne sont autres que J et I, à des constantes arbitraires près; d'où il suit, en appelant $-\frac{c}{b}$, $\frac{c'}{b}$ ces constantes, que les relations obtenues (33) équivalent, par la transposition des parties variables des derniers

termes, aux deux équations, du premier degré en I et J,

$$(34)\quad a\mathrm{I} + b\mathrm{J} = -e^{-ax}\cos bx + c, \qquad -b\mathrm{I} + a\mathrm{J} = -e^{-ax}\sin bx + c'.$$

Il suffit, pour en déduire I et J, d'ajouter ces deux équations, après les avoir respectivement multipliées, soit par a et par $-b$, soit par b et par a. Si l'on divise enfin par $a^2 + b^2$, il vient, en remarquant que $\frac{ac - bc'}{a^2 + b^2}$ et $\frac{bc + ac'}{a^2 + b^2}$ sont deux constantes quelconques,

$$(35)\quad \left\{ \begin{aligned} \int e^{-ax}\cos bx\,dx &= -\frac{a\cos bx - b\sin bx}{a^2 + b^2}e^{-ax} + \text{const.}, \\ \int e^{-ax}\sin bx\,dx &= -\frac{a\sin bx + b\cos bx}{a^2 + b^2}e^{-ax} + \text{const.} \end{aligned} \right.$$

On peut juger, par cet exemple et par ceux qui précèdent, combien est précieuse, dans une foule de cas, l'intégration par parties. Ce procédé et celui de substitution sont les deux principales ressources du Calcul intégral.

VINGT-TROISIÈME LEÇON.

APPLICATION DES PROCÉDÉS GÉNÉRAUX A L'INTÉGRATION DES DIFFÉRENTIELLES ALGÉBRIQUES LES PLUS SIMPLES.

239. — Différentielles rationnelles : de leur décomposition en termes ou en fractions aussi simples que possible.

Restreignons-nous maintenant aux différentielles algébriques, pour en faire une étude moins sommaire, et occupons-nous, en premier lieu, des différentielles rationnelles, les seules que l'on sache intégrer dans tous les cas.

On appelle *différentielle rationnelle* toute différentielle algébrique dans l'expression de laquelle n'entre aucun radical ou exposant fractionnaire portant sur la variable. En y effectuant les calculs, on la réduit toujours au produit de la différentielle, dx, de cette variable, par une *fraction rationnelle* (t. I, p. 25), c'est-à-dire par le quotient, $\frac{F(x)}{f(x)}$, de deux polynômes $F(x)$, $f(x)$. J'appellerai n le degré du dénominateur $f(x)$, et je supposerai qu'en divisant préalablement les deux termes de la fraction par le coefficient de x^n dans le dénominateur, on ait rendu égal à l'unité ce coefficient. Si donc $F(x)$, $f(x)$ sont ordonnés suivant les puissances décroissantes de x, l'expression de $f(x)$ aura la forme

$$f(x) = x^n + Kx^{n-1} + Lx^{n-2} + \ldots + M.$$

Cela posé, pour rendre intégrable la différentielle $\frac{F(x)}{f(x)}dx$, il suffira évidemment qu'on sache y décomposer la fraction complexe $\frac{F(x)}{f(x)}$ en termes plus simples, dont les fonctions primitives puissent s'obtenir séparément au moyen des règles de la dernière Leçon.

A cet effet, si l'expression $\frac{F(x)}{f(x)}$ n'est pas une fraction proprement dite, c'est-à-dire que le numérateur $F(x)$ s'y trouve d'un degré aussi élevé ou plus élevé que celui, n, du dénominateur $f(x)$, on divisera d'abord $F(x)$ par $f(x)$, jusqu'à ce qu'on obtienne un reste, $\varphi(x)$, du

degré $n-1$ au plus. On aura donc extrait de la fraction proposée un certain polynôme, constituant la *partie entière* que cette fraction contenait, et le quotient se complétera par la *fraction proprement dite* $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$, dont il nous reste à nous occuper pour la subdiviser en fractions aussi élémentaires que possible.

Dans ce but, nous commencerons par résoudre complètement, au moyen des procédés de l'Algèbre, l'équation du $n^{\text{ième}}$ degré $f(x)=0$, afin de décomposer $f(x)$ en ses facteurs réels du premier ou du second degré. Nous savons : 1° qu'aux diverses racines réelles simples, que j'appellerai $a, b, \ldots$, il correspondra tout autant de facteurs du premier degré, savoir $x-a$, $x-b$, $\ldots$; 2° qu'à chaque racine réelle multiple, c par exemple, d'un certain degré de multiplicité p, il correspondra le facteur $(x-c)^p$; 3° enfin, qu'à chaque couple de racines imaginaires conjuguées, de la forme $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ et $\alpha-\beta\sqrt{-1}$, il correspondra le facteur réel du second degré

$$(x-\alpha-\beta\sqrt{-1})(x-\alpha+\beta\sqrt{-1}) = (x-\alpha)^2+\beta^2,$$

en sorte que, si q désigne le degré de multiplicité de ce couple de racines conjuguées, $f(x)$ sera divisible par $[(x-\alpha)^2+\beta^2]^q$. Donc, quand on connaîtra toutes les racines réelles simples $a, b, \ldots$, toutes les racines réelles multiples $c, \ldots$, ainsi que leurs degrés respectifs de multiplicité $p, \ldots$, et tous les couples de racines imaginaires $\alpha\pm\beta\sqrt{-1}$, $\ldots$, avec leurs degrés analogues de multiplicité $q, \ldots$, on pourra mettre le dénominateur $f(x)$ de la fraction sous la forme

$$f(x) = (x-a)(x-b)\ldots(x-c)^p\ldots[(x-\alpha)^2+\beta^2]^q\ldots;$$

et il est évident que le degré, n, de $f(x)$, égalera le nombre des facteurs du premier degré $x-a$, $x-b$, $\ldots$, $x-c$, $x-c$, $\ldots$, plus le double du nombre des facteurs du second degré $(x-\alpha)^2+\beta^2$, $\ldots$, c'est-à-dire, en tout, le nombre des racines tant imaginaires que réelles de l'équation $f(x)=0$, chacune comptant pour autant que l'indique son degré de multiplicité.

Actuellement, l'expression considérée $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$, avec son numérateur $\varphi(x)$ d'un degré moindre que le dénominateur et son dénominateur égal au produit des facteurs $x-a$, $x-b$, $\ldots$, $(x-c)^p$, $\ldots$, $[(x-\alpha)^2+\beta^2]^q$, $\ldots$, se trouve avoir justement la forme de la fraction qu'on obtient, toutes les fois qu'on ajoute ensemble des fractions ayant comme dénominateurs ces facteurs respectifs et ayant leurs

numérateurs de degrés moindres que leurs dénominateurs. En effet, de telles fractions, quand on les réduit au dénominateur commun $f(x)$ en multipliant leurs deux termes par les polynômes $\frac{f(x)}{x-a}$, $\frac{f(x)}{x-b}$, ..., $\frac{f(x)}{(x-c)^p}$, ..., acquièrent des numérateurs généralement du degré $n-1$, comme $\varphi(x)$, et la somme de ces numérateurs, numérateur de la somme des fractions, forme bien de même un polynôme analogue à $\varphi(x)$. Il est donc naturel de chercher à décomposer $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ en fractions plus simples, qui auraient pour dénominateurs, respectivement, $x-a$, $x-b$, ..., et dont les numérateurs, de degrés moindres, seraient : 1°, de simples constantes A, B, ... pour les fractions correspondant aux facteurs du premier degré; 2°, des polynômes de degrés $p-1$, $2q-1$ pour les fractions correspondant aux facteurs plus complexes $(x-c)^p$, $[(x-\alpha)^2+\beta^2]^q$, ...

Or ces dernières fractions peuvent elles-mêmes se décomposer en d'autres plus simples. Car si, par exemple, celle qui correspond au facteur $(x-c)^p$ est $\frac{\psi(x)}{(x-c)^p}$, où $\psi(x)$ désigne un polynôme du degré $p-1$, on pourra, en divisant $\psi(x)$ par $x-c$ et appelant d'une part Q le quotient de degré $p-2$, d'autre part C_p le reste constant, écrire $\psi(x) = Q(x-c) + C_p$, ou, par suite,

$$\frac{\psi(x)}{(x-c)^p} = \frac{Q}{(x-c)^{p-1}} + \frac{C_p}{(x-c)^p};$$

puis on extraira par le même procédé, de $\frac{Q}{(x-c)^{p-1}}$, une nouvelle fraction simple, de la forme $\frac{C_{p-1}}{(x-c)^{p-1}}$, analogue à $\frac{C_p}{(x-c)^p}$; et ainsi de suite, jusqu'à ce que la fraction $\frac{\psi(x)}{(x-c)^p}$ se trouve remplacée par une somme, $\frac{C_p}{(x-c)^p} + \frac{C_{p-1}}{(x-c)^{p-1}} + \ldots + \frac{C_2}{(x-c)^2} + \frac{C_1}{x-c}$, où les numérateurs C_1, C_2, ..., C_p seront des nombres constants. De même, si $\chi(x)$ désigne le numérateur de la fraction correspondant au facteur $[(x-\alpha)^2+\beta^2]^q$, en divisant $\chi(x)$ par le trinôme du second degré $(x-\alpha)^2+\beta^2 = x^2-2\alpha x+(\alpha^2+\beta^2)$ et appelant Q le quotient, du degré $2q-3$, $D_q x + E_q$ le reste du premier degré, on aura

$$\chi(x) = Q[(x-\alpha)^2+\beta^2] + (D_q x + E_q);$$

et la fraction considérée, $\frac{\chi(x)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^q}$, deviendra

$$\frac{Q}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{q-1}}+\frac{D_q x+E_q}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^q}.$$

De la première de celles-ci, $\frac{Q}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{q-1}}$, on extraira pareillement une nouvelle fraction, de la forme $\frac{D_{q-1}x+E_{q-1}}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{q-1}}$; et ainsi de suite, de manière à remplacer finalement la fraction complexe proposée $\frac{\chi(x)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^q}$ par d'autres, plus simples, ayant comme numérateurs des binômes du premier degré en x et pour dénominateurs les puissances successives, première, deuxième, etc. de $(x-\alpha)^2+\beta^2$, jusqu'à la $q^{\text{ième}}$ inclusivement.

En résumé, si A, B, C, ..., C_p, C_{p-1}, ..., C_1, ..., D_q, E_q, D_{q-1}, E_{q-1}, ..., D_1, E_1, ... désignent certains coefficients constants inconnus, on voit qu'il y a lieu de considérer les fractions

$$(1)\quad\left\{\begin{array}{l}\dfrac{A}{x-a},\ \dfrac{B}{x-b},\ \ldots,\ \dfrac{C_p}{(x-c)^p},\ \dfrac{C_{p-1}}{(x-c)^{p-1}},\ \ldots,\ \dfrac{C_1}{x-c},\ \ldots,\\[2ex] \dfrac{D_q x+E_q}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^q},\ \dfrac{D_{q-1}x+E_{q-1}}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{q-1}},\ \ldots,\ \dfrac{D_1 x+E_1}{(x-\alpha)^2+\beta^2},\ \ldots,\end{array}\right.$$

et de chercher à déterminer les coefficients dont il s'agit de manière à rendre la somme de ces fractions identiquement égale à la fraction complexe proposée $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$. Alors, en effet, celle-ci se trouvera décomposée en fractions plus simples (1), dont chacune multipliée par dx s'intégrera assez facilement, comme nous verrons tout à l'heure.

240. — Calcul des fractions simples par la méthode des coefficients indéterminés.

En conséquence, réduisons toutes les fractions (1) au dénominateur commun $f(x)$, en multipliant leurs termes, respectivement, par les polynômes $\frac{f(x)}{x-a}$, $\frac{f(x)}{x-b}$, ..., $\frac{f(x)}{(x-c)^p}$, $\frac{f(x)}{(x-c)^{p-1}}$, ..., $\frac{f(x)}{x-c}$, ..., $\frac{f(x)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^q}$, $\frac{f(x)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{q-1}}$, ..., $\frac{f(x)}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$, ...; puis, ajoutant leurs numérateurs pour en égaler la somme au poly-

nôme $\varphi(x)$ qui doit l'exprimer identiquement, posons

$$
(2)\quad \left\{
\begin{aligned}
\varphi(x) = {} & \mathrm{A}\frac{f(x)}{x-a} + \mathrm{B}\frac{f(x)}{x-b} + \ldots + \mathrm{C}_p\frac{f(x)}{(x-c)^p} + \mathrm{C}_{p-1}\frac{f(x)}{(x-c)^{p-1}} + \ldots \\
& + \mathrm{C}_1\frac{f(x)}{x-c} + \ldots + (\mathrm{D}_q x + \mathrm{E}_q)\frac{f(x)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^q} \\
& + (\mathrm{D}_{q-1} x + \mathrm{E}_{q-1})\frac{f(x)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{q-1}} + \ldots + (\mathrm{D}_1 x + \mathrm{E}_1)\frac{f(x)}{(x-\alpha)^2+\beta^2} \ldots
\end{aligned}
\right.
$$

Les parties du second membre qui correspondent aux racines réelles de $f(x) = 0$ sont, comme les quotients $\frac{f(x)}{x-a}$, $\frac{f(x)}{x-b}$, $\ldots$, $\frac{f(x)}{(x-c)^q}$, $\ldots$, du degré $n-1$ en x, ou de degrés moindres; et les parties suivantes, produits de facteurs du premier degré par les quotients (de degrés $n-2q$, $n-2q+2$, $\ldots$, $n-2$, $\ldots$) $\frac{f(x)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^q}$, $\frac{f(x)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{q-1}}$, $\ldots$, $\frac{f(x)}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$, $\ldots$, sont aussi, elles-mêmes, du degré $n-1$ ou de degrés moindres. Donc toutes ces expressions qui forment le second membre de (2), polynômes en x dont les coefficients contiennent linéairement les constantes indéterminées A, B, $\ldots$, C_p, $\ldots$, D_q, E_q, $\ldots$, donneront en tout un polynôme analogue à $\varphi(x)$, c'est-à-dire du degré $n-1$, mais où le coefficient de chaque puissance de x sera une somme de termes proportionnels aux diverses constantes A, B, $\ldots$, C_p, $\ldots$. Et c'est cette somme, pour chacun des coefficients totaux des puissances, x^{n-1}, x^{n-2}, $\ldots$, x^2, x^1, x^0 ou 1, de x, qui devra, d'après la question posée, avoir la valeur numérique (fût-elle seulement zéro) du coefficient connu de la même puissance de x dans $\varphi(x)$.

L'identification des deux membres de (2) fournira donc n équations du premier degré entre les constantes A, B, $\ldots$, C_p, $\ldots$. Or celles-ci sont justement au nombre de n, c'est-à-dire en même nombre que les racines de l'équation $f(x) = 0$, puisqu'il en correspond une, A, ou B, etc., à chaque racine réelle simple, qu'il en correspond p, savoir C_1, C_2, $\ldots$, C_p, à chaque racine réelle d'un degré p de multiplicité, et, enfin, $2q$, qui sont D_1, E_1, $\ldots$, D_q, E_q, à chaque couple de racines imaginaires d'un degré q de multiplicité. Ainsi le système de relations du premier degré obtenu entre les constantes A, B, $\ldots$ se composera d'autant d'équations que d'inconnues; et l'on conçoit qu'il détermine parfaitement ces inconnues ou qu'il fournisse, sans ambiguïté, un système unique

de valeurs pour A, B, ..., C_p, ... C'est ce qu'un examen détaillé, mais dont la place est dans le cours d'Algèbre, prouve effectivement, à condition, bien entendu, que la fraction $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ soit irréductible, ou qu'on ait préalablement supprimé, comme on doit l'admettre, les facteurs réels du premier ou du second degré communs à $\varphi(x)$ et à $f(x)$, s'il s'en trouvait de tels. Il nous suffit ici de montrer comment s'obtiendront les coefficients A, B, ..., et, par suite, les fractions simples $\frac{A}{x-a}$, $\frac{B}{x-b}$, ..., en résolvant un système de n équations du premier degré : c'est ce qu'un exemple achèvera bientôt d'éclaircir.

241*. — Formules générales des fractions simples, quand leurs numérateurs sont constants.

(Compléments, p. 20*.)

242. — Intégration des termes les moins complexes provenant de la décomposition de la différentielle rationnelle proposée.

En résumé, la décomposition de l'expression primitive donnée $\frac{F(x)}{f(x)}$ aura fourni trois sortes de termes, savoir : 1° des monômes comme Mx^m; 2° des fractions simples de la forme $\frac{C}{(x-c)^m}$; 3° d'autres fractions de la forme plus compliquée $\frac{Dx+E}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^m}$. Il ne reste donc qu'à voir comment on intégrera les produits par dx de ces trois sortes de termes.

Et, d'abord, tout terme de la première espèce, Mx^m, donnera la différentielle $Mx^m dx$, dont l'intégrale sera $M\frac{x^{m+1}}{m+1}$.

Quant à un terme de la deuxième espèce, la différentielle correspondante, de la forme $\frac{M\,dx}{(x-c)^m}$, pourra s'écrire $M(x-c)^{-m}d(x-c)$ et aura pour intégrale, si m dépasse l'unité, $M\frac{(x-c)^{-m+1}}{-m+1}$, c'est-à-dire $-\frac{M}{(m-1)(x-c)^{m-1}}$. Au contraire, dans le cas beaucoup plus fréquent $m=1$ où, en appelant t la valeur absolue $\pm(x-c)$ de $x-c$, cette différentielle $M\frac{\pm dx}{\pm(x-c)}$ égalera $M\frac{dt}{t}$, l'intégrale sera $M\log t$,

c'est-à-dire $M\log(x-c)$, si $x-c$ est positif, et $M\log(c-x)$, si c'est, au contraire, $c-x$ qui est positif (¹).

Soit, enfin, $\frac{(Dx+E)dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^m}$ la différentielle à laquelle conduit un terme de la troisième espèce. On la débarrasse d'abord de la partie du premier degré en x, au numérateur, en remplaçant $Dx+E$ par la quantité évidemment équivalente $D(x-\alpha)+(D\alpha+E)$; ce qui permet de dédoubler la différentielle en deux termes, dont l'un est $\frac{D(x-\alpha)dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^m}=\frac{D}{2}\frac{d[(x-\alpha)^2+\beta^2]}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^m}$, et l'autre, $\frac{(D\alpha+E)dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^m}$. Le premier, si l'on y pose $(x-\alpha)^2+\beta^2=t$, devient $\frac{D}{2}t^{-m}dt$ et a pour intégrale soit $-\frac{D}{2(m-1)t^{m-1}}$, c'est-à-dire

$$-\frac{D}{2(m-1)[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{m-1}},$$

quand m dépasse l'unité, soit $\frac{D}{2}\log t$, c'est-à-dire $\frac{D}{2}\log[(x-\alpha)^2+\beta^2]$ ou $D\log\sqrt{(x-\alpha)^2+\beta^2}$, dans le cas ordinaire $m=1$.

Considérons donc le seul terme restant, qui est

$$\frac{(D\alpha+E)dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^m}=\frac{(D\alpha+E)d(x-\alpha)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^m};$$

et divisons-y par β^{2m} le numérateur et le dénominateur. Le résultat pourra évidemment s'écrire $\frac{D\alpha+E}{\beta^{2m-1}}\frac{d\frac{x-\alpha}{\beta}}{\left[\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2+1\right]^m}$. Prenons-y enfin comme variable auxiliaire t le rapport $\frac{x-\alpha}{\beta}$, et, abstraction faite du facteur constant $\frac{D\alpha+E}{\beta^{2m-1}}$, ce terme aura la forme, aussi simple que

(¹) Cette double forme, $\log(x-c)$ et $\log(c-x)$, donnée à l'intégrale de $\frac{dx}{x-c}$, a pour but de ne faire figurer que des logarithmes *réels*, des logarithmes de nombres *positifs*. Mais en admettant aussi dans les formules le logarithme imaginaire le plus simple des nombres négatifs, celui qui dépasse de $\pi\sqrt{-1}$ le logarithme de la valeur absolue de ces nombres (t. I, p. 36*), on pourrait se contenter d'une seule des deux formes, puisque $\log(x-c)$ et $\log(c-x)$ ne diffèrent que par la constante $\pi\sqrt{-1}$ et ont la même partie variable avec x, ou s'équivalent en tant qu'intégrales indéfinies.

possible,

$$\frac{dt}{(t^2+1)^m}.$$

En définitive, il nous suffira, pour savoir intégrer toute différentielle rationnelle, d'obtenir l'expression de $\int \frac{dt}{(1+t^2)^m}$, où m désigne un exposant entier et positif quelconque.

213. — Intégration des expressions plus compliquées auxquelles conduit la même décomposition, c'est-à-dire de $\frac{dt}{(1+t^2)^m}$; conclusion générale.

Occupons-nous donc du calcul de $\int \frac{dt}{(1+t^2)^m}$. Dans le cas ordinaire et simple où $m = 1$, cette intégrale s'obtient immédiatement, car elle se réduit à $\int \frac{dt}{1+t^2} = \text{arc tang } t$. Il ne reste plus ainsi qu'à ramener les autres cas à celui-là, en apprenant à y abaisser l'exposant m d'une unité et, par suite, d'autant d'unités qu'il le faut pour le réduire à 1. A cet effet, cherchons comment $\int \frac{dt}{(1+t^2)^m}$ peut se calculer en fonction de $\int \frac{dt}{(1+t^2)^{m-1}}$. Pour abréger, appelons respectivement I_m, I_{m-1} ces deux intégrales, ou posons

$$I_m = \int \frac{dt}{(1+t^2)^m}, \qquad I_{m-1} = \int \frac{dt}{(1+t^2)^{m-1}}.$$

En retranchant I_{m-1} de I_m, nous aurons évidemment

$$\left\{\begin{aligned} I_m - I_{m-1} &= \int \left[\frac{dt}{(1+t^2)^m} - \frac{dt}{(1+t^2)^{m-1}}\right] \\ &= \int \frac{1-(1+t^2)}{(1+t^2)^m}\,dt = -\int t\,\frac{t\,dt}{(1+t^2)^m}. \end{aligned}\right.$$

Or $\frac{t\,dt}{(1+t^2)^m}$ ne diffère pas de $\frac{1}{2}(1+t^2)^{-m}d(1+t^2)$, qui est la différentielle de $\frac{1}{2}\,\frac{(1+t^2)^{-m+1}}{-m+1} = -\frac{1}{2m-2}\,\frac{1}{(1+t^2)^{m-1}}$. L'expression $-\int t\,\frac{t\,dt}{(1+t^2)^m}$ revient donc à $\frac{1}{2m-2}\int t\,d\,\frac{1}{(1+t^2)^{m-1}}$, et l'intégration par parties la transforme en celle-ci

$$\frac{1}{2m-2}\left[\frac{t}{(1+t^2)^{m-1}} - \int \frac{dt}{(1+t^2)^{m-1}}\right],$$

qui, à une constante arbitraire près, n'est autre que

$$\frac{t}{(2m-2)(1+t^2)^{m-1}}-\frac{\mathrm{I}_{m-1}}{2m-2}.$$

L'égalité ci-dessus peut s'écrire, en conséquence,

$$\mathrm{I}_m-\mathrm{I}_{m-1}=\frac{t}{(2m-2)(1+t^2)^{m-1}}-\frac{1}{2m-2}\mathrm{I}_{m-1}+\text{const. arbitraire.}$$

Si donc nous isolons I_m dans le premier membre et que nous groupions, dans le second, les termes en I_{m-1}, puis que nous remplacions I_m, I_{m-1} par leurs expressions $\int\frac{dt}{(1+t^2)^m}$ et $\int\frac{dt}{(1+t^2)^{m-1}}$, il viendra, en supposant d'ailleurs la constante arbitraire du second membre implicitement contenue dans le terme qui s'y trouve affecté du signe $\int$,

$$(11)\qquad \int\frac{dt}{(1+t^2)^m}=\frac{t}{(2m-2)(1+t^2)^{m-1}}+\frac{2m-3}{2m-2}\int\frac{dt}{(1+t^2)^{m-1}}.$$

Telle est la formule qui, appliquée $m-1$ fois, permettra d'abaisser l'exposant m de $m-1$ unités, de manière à le réduire à la valeur 1. L'intégrale proposée I_m se trouvera ainsi exprimée au moyen de $m-1$ termes algébriques et d'un dernier terme, transcendant, en

$$\int\frac{dt}{1+t^2}=\text{arc tang}\,t.$$

Il est bon d'observer à cet égard que, si l'on voulait ramener ce terme à $\mathrm{I}_0=\int\frac{dt}{(1+t^2)^0}=t+\text{const.}$, en posant $m=1$ dans (11), le dénominateur $2m-2$, qui paraît dans chacun des deux termes variables du second membre, s'annulerait et rendrait ce second membre illusoire, comme il est arrivé plus haut (p. 18) pour la relation

$$\int x^m\,dx=\frac{x^{m+1}}{m+1}+c,$$

dans le cas $m=-1$. Il en est ainsi toutes les fois qu'on veut représenter *algébriquement* une fonction *transcendante*. L'expression dont celle-ci constitue un *cas limite* acquiert des coefficients ou des exposants infinis qui ne lui permettent de donner qu'une réponse en quelque sorte évasive, ou s'évanouissant dès qu'on lui impose d'être exacte et non plus seulement approchée.

En résumé, *les différentielles rationnelles peuvent toujours s'intégrer sous forme finie, en ce sens que leurs intégrales comprennent un nombre limité de termes soit algébriques, soit affectés des trans-*

cendantes les plus simples : les termes algébriques y sont rationnels et les termes transcendants y sont des fonctions inverses, logarithmes ou arcs tangente, d'expressions entières par rapport à la variable. Les arcs tangente y deviendront d'ailleurs des arcs sinus ou des arcs cosinus si l'on y fait paraître un sinus ou un cosinus au lieu de la tangente, en fonction de laquelle on sait que le sinus ou le cosinus du même arc s'expriment algébriquement.

Ces résultats remarquables ont été obtenus vers 1702 par Leibnitz et Jean Bernoulli : ils constituent le chapitre en quelque sorte le plus simple, il est vrai, mais aussi le plus achevé du Calcul intégral.

24. — Exemple : intégration de $\frac{x^4+a^4}{x^4-a^4}dx$.

Éclaircissons, par un exemple, ce que pourrait avoir de trop général ou de trop abstrait la théorie précédente. Prenons $F(x)=x^4+a^4$, $f(x)=x^4-a^4$: ou soit à intégrer l'expression $\frac{x^4+a^4}{x^4-a^4}dx$.

La division du numérateur par le dénominateur donne d'abord

$$\frac{F(x)}{f(x)}=1+\frac{2a^4}{x^4-a^4},$$

et il reste à décomposer la fraction rationnelle $\frac{2a^4}{x^4-a^4}$. Pour cela, conformément à la marche indiquée, cherchons les racines de l'équation $f(x)=0$, c'est-à-dire $x^4-a^4=0$, ou mieux, résolvons x^4-a^4 en facteurs réels aussi simples que possible. Il vient évidemment $x^4-a^4=(x^2-a^2)(x^2+a^2)$; et, d'ailleurs, $x^2-a^2=(x-a)(x+a)$, tandis que le facteur x^2+a^2, somme de deux carrés, ne pourrait se dédoubler qu'en facteurs imaginaires. Ainsi, l'on aura définitivement $x^4-a^4=(x-a)(x+a)(x^2+a^2)$; et il s'agira de décomposer

$$\frac{2a^4}{x^4-a^4}$$

en trois fractions simples, ayant respectivement les formes $\frac{A}{x-a}$, $\frac{B}{x+a}$, $\frac{Cx+D}{x^2+a^2}$. Posons donc

$$\frac{2a^4}{x^4-a^4}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x+a}+\frac{Cx+D}{x^2+a^2}, \tag{12}$$

c'est-à-dire

$$2a^4=A\frac{x^4-a^4}{x-a}+B\frac{x^4-a^4}{x+a}+Cx\frac{x^4-a^4}{x^2+a^2}+D\frac{x^4-a^4}{x^2+a^2},$$

ou bien, en effectuant les divisions indiquées et plaçant les uns sous les autres les termes semblables,

$$2a^4 = \left\{ \begin{array}{l} \quad\mathrm{A}(x^3 + a x^2 + a^2 x + a^3) \\ + \mathrm{B}(x^3 - a x^2 + a^2 x - a^3) \\ + \mathrm{C}(x^3 \qquad\quad - a^2 x \qquad\;\;) \\ + \mathrm{D}(\qquad\; x^2 \qquad\quad - a^2). \end{array} \right.$$

On voit que, pour rendre le polynôme du troisième degré en x, qui constitue le second membre, identiquement égal au premier membre $2a^4$, ou, pour égaler, dans les deux membres, les coefficients totaux des mêmes puissances de x, il faudra, au second membre, annuler ceux de x^3, x^2, x et égaler à $2a^4$ le coefficient de x^0, formé par l'ensemble des termes constants. Il vient donc, pour déterminer les quatre inconnues A, B, C, D, les quatre équations

$$(13) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C} = 0, & a\mathrm{A} - a\mathrm{B} + \mathrm{D} = 0, \\ a^2\mathrm{A} + a^2\mathrm{B} - a^2\mathrm{C} = 0, & a^3\mathrm{A} - a^3\mathrm{B} - a^2\mathrm{D} = 2a^4. \end{array} \right.$$

Si l'on divise la troisième par a^2 et qu'on la combine alors avec la première, tant par voie d'addition que par voie de soustraction, on trouve $\mathrm{A} + \mathrm{B} = 0$, $\mathrm{C} = 0$; en sorte que ces deux équations reviennent à prendre $\mathrm{C} = 0$, $\mathrm{B} = -\mathrm{A}$. Alors la seconde (13), résolue par rapport à D, devient elle-même $\mathrm{D} = a(\mathrm{B} - \mathrm{A}) = -2a\mathrm{A}$. Enfin, ces valeurs, $-\mathrm{A}$, $-2a\mathrm{A}$, de B et D, portées dans la quatrième (13), la changent en celle-ci, $4a^3\mathrm{A} = 2a^4$, qui donne $\mathrm{A} = \frac{a}{2}$ et achève par suite de déterminer les inconnues. On a donc $\mathrm{A} = \frac{a}{2}$, $\mathrm{B} = -\frac{a}{2}$, $\mathrm{C} = 0$, $\mathrm{D} = -a^2$.

C'est dire que, d'après l'égalité (12), accrue, dans ses deux membres, de la partie entière 1 trouvée précédemment, la valeur décomposée de a fraction $\frac{x^4 + a^4}{x^4 - a^4}$ est

$$(14) \qquad \frac{x^4 + a^4}{x^4 - a^4} = 1 + \frac{a}{2}\left(\frac{1}{x - a} - \frac{1}{x + a}\right) - \frac{a^2}{x^2 + a^2}.$$

Et, en effet, si nous additionnons les termes du second membre, il vient successivement

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 + \dfrac{a}{2}\left(\dfrac{x + a}{x^2 - a^2} - \dfrac{x - a}{x^2 - a^2}\right) - \dfrac{a^2}{x^2 + a^2} \\ \quad = 1 + a^2\left(\dfrac{1}{x^2 - a^2} - \dfrac{1}{x^2 + a^2}\right) = 1 + \dfrac{2a^4}{x^4 - a^4} = \dfrac{x^4 + a^4}{x^4 - a^4}. \end{array} \right.$$

Cette vérification ne doit jamais être négligée; car les calculs de décomposition d'une fonction rationnelle en termes simples, étant généralement longs et arides, prêtent beaucoup à erreur.

Multiplions actuellement par dx les deux membres de (14) et intégrons, en observant que

$$\left\{\begin{aligned} &\int dx = x, \quad \int \frac{dx}{x-a} - \int \frac{dx}{x+a} = \log(x-a) - \log(x+a) = \log\frac{x-a}{x+a}, \\ &\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d\frac{x}{a}}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc tang}\frac{x}{a}. \end{aligned}\right.$$

L'intégrale cherchée, si l'on y remplace $\frac{a}{2}\log\frac{x-a}{x+a}$ par $a\log\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}$, sera donc

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} \int \frac{x^4+a^4}{x^4-a^4}\,dx &= x + a\log\sqrt{\frac{x-a}{x+a}} - a \operatorname{arc tang}\frac{x}{a} + \text{const.} \\ &= a\left(\frac{x}{a} + \log\sqrt{\frac{\frac{x}{a}-1}{\frac{x}{a}+1}} - \operatorname{arc tang}\frac{x}{a}\right) + \text{const.} \end{aligned}\right.$$

245. — Intégration des différentielles irrationnelles dont tous les radicaux portent sur une même expression de la forme $\frac{ax+b}{a'x+b'}$.

Après avoir vu comment s'intègrent, dans tous les cas, les différentielles rationnelles, passons à l'étude des types les plus usuels des différentielles irrationnelles, relativement peu nombreuses, que l'on sait intégrer.

Le plus simple concerne les différentielles dans lesquelles tous les radicaux portent sur une même expression de la forme $\frac{ax+b}{a'x+b'}$, généralement fractionnaire, mais qui devient entière et se réduit à un binôme $ax+b$, quand on prend $a'=0$, $b'=1$. Comme, d'ailleurs, $ax+b$ se réduit lui-même à x pour $b=0$ et $a=1$, on voit que le cas dont il s'agit comprend toutes les différentielles affectées seulement *d'irrationnelles monômes*, c'est-à-dire dans lesquelles les radicaux portent uniquement sur x, à des facteurs constants près qu'on peut en faire sortir.

En remplaçant les radicaux par des exposants fractionnaires et puis

réduisant tous ceux-ci à un dénominateur commun positif m, on aura, comme radical unique, dans la différentielle proposée, la quantité $\sqrt[m]{\frac{ax+b}{a'x+b'}}$, dont les radicaux en question égaleront des puissances entières. La différentielle proposée pourra donc s'écrire

$$f\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{a'x+b'}}\right) dx,$$

où f désignera une fonction *rationnelle* des deux variables x et

$$\sqrt[m]{\frac{ax+b}{a'x+b'}}.$$

On l'intègre, comme du reste les autres types de différentielles irrationnelles dont il sera question ci-après, au moyen d'une substitution ou changement de variable propre à la transformer en une différentielle rationnelle, que l'on traite ensuite par le procédé général de Leibnitz et Jean Bernoulli. A cet effet, prenant le radical pour nouvelle variable, posons

$$(16) \qquad t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{a'x+b'}}; \qquad \text{d'où} \qquad \frac{ax+b}{a'x+b'} = t^m.$$

L'équation en x, *du premier degré seulement*, donnera par suite à x une valeur, que j'appellerai $\varphi(t)$ pour abréger, fonction rationnelle de t : ce sera la quantité $\frac{b't^m - b}{a - a't^m}$. Sa différentielle, $dx = \varphi'(t)\,dt$, sera évidemment rationnelle elle-même, et l'expression proposée, $f\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{a'x+b'}}\right) dx$, devenue $f[\varphi(t), t]\,\varphi'(t)\,dt$, ne contiendra plus aucun radical. On pourra donc l'intégrer par la méthode exposée ci-dessus, et, si $F(t)$ désigne son intégrale, il viendra, en remplaçant t par sa valeur (16),

$$(17) \qquad \int f\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{a'x+b'}}\right) dx = F\left(\sqrt[m]{\frac{ax+b}{a'x+b'}}\right) + \text{const.}$$

246. — Autre type : différentielles qui ne contiennent qu'un radical carré, portant sur un trinôme du second degré ; leur intégration sous forme réelle, quand le trinôme est décomposable en facteurs réels du premier degré.

Le deuxième type de différentielles irrationnelles qu'on sait intégrer comprend toutes celles où il ne paraît, soit une fois, soit plusieurs fois

ou à plusieurs endroits, qu'un seul radical ayant 2 pour indice et portant sur un trinôme du second degré. Désignons ce radical par $\sqrt{a+bx+cx^2}$, et la différentielle proposée sera de la forme

$$f(x, \sqrt{a+bx+cx^2})\,dx,$$

si f désigne une fonction rationnelle.

Avant d'intégrer, on trouve avantage à simplifier le radical, en y écrivant ainsi le trinôme, $(\pm c)\left(\frac{a}{\pm c} + \frac{b}{\pm c}x \pm x^2\right)$, où $\pm c$, pris avec le signe supérieur si c est positif, et avec le signe inférieur si c est négatif, désigne la valeur absolue du coefficient du terme en x^2 : on peut alors extraire la racine carrée du facteur constant essentiellement positif $\pm c$, représenter chacun des quotients censés effectués $\frac{a}{\pm c}$, $\frac{b}{\pm c}$, par une seule lettre, que je supposerai être respectivement A, B, et la différentielle à intégrer prend la forme sous laquelle nous la considérerons, $f(x, \sqrt{A+Bx\pm x^2})\,dx$, où f continue à désigner une fonction rationnelle de deux variables.

Supposons d'abord que le trinôme $A+Bx\pm x^2$ donne deux racines réelles, α, β, quand on résout l'équation du second degré obtenue en l'égalant à zéro. Nous savons qu'alors ce trinôme sera le produit du coefficient ± 1 de x^2 par les deux facteurs linéaires $x-\alpha$, $x-\beta$. La différentielle à intégrer pourra donc s'écrire

$$f\left[x, \sqrt{\pm(x-\alpha)(x-\beta)}\right]dx.$$

Soit t une nouvelle variable, définie par l'équation

$$\sqrt{\pm(x-\alpha)(x-\beta)} = (x-\alpha)t, \tag{18}$$

c'est-à-dire telle que l'on ait

$$t = \frac{\sqrt{\pm(x-\alpha)(x-\beta)}}{x-\alpha} = \sqrt{\pm\frac{x-\beta}{x-\alpha}}. \tag{19}$$

En élevant (18) au carré et puis supprimant le facteur commun $x-\alpha$ (ce qu'on peut faire, puisqu'il ne s'annule que pour la valeur isolée $x=\alpha$), il viendra

$$\pm(x-\beta) = (x-\alpha)t^2. \tag{20}$$

Or cette équation est du premier degré en x et, par suite, résolue, donne une expression de x rationnelle, que je représenterai par $\varphi(t)$ comme dans le cas du type précédent de différentielles irrationnelles.

En la différentiant, on aura $dx = \varphi'(t)\,dt$ et, l'expression (18) du radical devenant d'ailleurs $t\varphi(t) - \alpha t$, la différentielle proposée prendra la forme, elle-même rationnelle, $f[\varphi(t), t\varphi(t) - \alpha t]\,\varphi'(t)\,dt$. Elle se trouvera donc intégrable par la méthode exposée dans la première partie de cette Leçon : si l'on appelle $F(t)$ la fonction primitive obtenue, le résultat demandé sera, vu la valeur (19) de t,

$$F\left(\sqrt{\pm\frac{x-\beta}{x-\alpha}}\right) + \text{const.}$$

247. — Suite : Autres procédés, applicables notamment lorsque le trinôme n'est pas décomposable en facteurs réels du premier degré.

Quand le trinôme $A + Bx \pm x^2$, égalé à zéro, a ses deux racines imaginaires ou, ce qui revient au même, quand il n'est pas décomposable en facteurs réels du premier degré, on sait qu'il conserve le même signe, sans s'annuler, pour toutes les valeurs de x comprises entre $-\infty$ et $+\infty$. Alors le radical et, par suite, la différentielle proposée ne sont des quantités réelles, comme nous le supposerons, qu'autant que ce signe, constamment le même, du trinôme, est $+$. Donc le trinôme se trouve positif, en particulier, pour la valeur zéro de x, qui le réduit à A, de sorte qu'on a $A > 0$; et il l'est aussi pour les très grandes valeurs absolues de x, qui rendent, comme on sait, prépondérant le terme $\pm x^2$ du second degré, ce qui oblige également à poser $\pm x^2 > 0$, ou implique, devant x^2, le signe supérieur $+$, à l'exclusion de l'autre $-$. Ainsi, le trinôme, lorsqu'il paraîtra dans une différentielle réelle et ne sera pas décomposable en deux facteurs réels du premier degré, offrira ces deux caractères, d'avoir son terme constant A, positif, et son terme du second degré x^2, précédé du signe $+$.

Or chacun de ces deux caractères conduit à une transformation réelle qui rend rationnelle et par conséquent intégrable la différentielle proposée, transformation d'ailleurs applicable même à des cas où le trinôme se résout en facteurs réels du premier degré, pourvu que le caractère en question y soit vérifié, c'est-à-dire pourvu qu'on n'ait pas $A < 0$, s'il s'agit de la première transformation, ou que le terme du second degré ne soit pas $-x^2$, s'il s'agit de la seconde.

Supposons donc d'abord que A se trouve ou nul, ou positif, et admette par conséquent une racine carrée réelle; ce qui, en appelant a cette racine, prise d'ailleurs, à volonté, avec le signe $+$ ou le signe $-$, permet d'écrire la différentielle proposée, $f(x, \sqrt{a^2 + Bx \pm x^2})\,dx$. Choisissons notre nouvelle variable t, de manière qu'on ait

$$(21) \qquad \sqrt{a^2 + Bx \pm x^2} = a + tx,$$

ou, en d'autres termes, prenons

$$(22)\qquad t = \frac{\sqrt{a^2 + Bx \pm x^2} - a}{x}.$$

En élevant (21) au carré et supprimant des deux membres du résultat le terme a^2, puis un facteur commun x, il viendra, pour définir x en fonction de t, la relation

$$(23)\qquad B \pm x = 2at + t^2 x.$$

On voit que celle-ci est du premier degré en x, comme (20) dans le cas précédent. On en tirera donc une expression de x, rationnelle, de la forme $x = \varphi(t)$, une expression de dx, $\varphi'(t)\,dt$, rationnelle aussi, et le radical $\sqrt{a^2 + Bx \pm x^2}$, devenu, d'après (21),

$$a + tx \quad \text{ou} \quad a + t\varphi(t),$$

sera lui-même rationnel. Dès lors la différentielle proposée, changée en celle-ci $f[\varphi(t),\ a + t\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt$, s'intégrera par les règles données tout à l'heure pour les différentielles rationnelles; et il suffira de remplacer finalement, dans le résultat, t par sa valeur (22).

Passons au procédé applicable toutes les fois que le terme en x^2 du trinôme est $+x^2$ et non $-x^2$. Il consiste à poser

$$(24)\qquad \sqrt{A + Bx + x^2} = t - x;$$

ce qui donne

$$(25)\qquad t = x + \sqrt{A + Bx + x^2}.$$

En élevant (24) au carré, puis supprimant des deux membres le terme commun x^2, il vient encore une équation du premier degré en x; d'où résultent toujours une expression de x, qu'on peut écrire $x = \varphi(t)$, rationnelle, et une valeur de dx, $\varphi'(t)\,dt$, rationnelle également, ainsi que la formule $t - x$ ou $t - \varphi(t)$ du radical

$$\sqrt{A + Bx + x^2}.$$

La différentielle proposée devient donc intégrable; et il suffit de remplacer enfin t, dans le résultat auquel elle conduit, par sa valeur (25).

248. — Exemple : calcul de $\int \frac{dx}{\sqrt{A + x^2}}$.

Comme application des méthodes précédentes, intégrons par le

dernier procédé l'expression $\dfrac{dx}{\sqrt{A+x^2}}$, qui se présente assez souvent en Analyse et en Mécanique. Nous aurons à écrire, d'après (24),

$$\sqrt{A+x^2} = t - x$$

ou, en élevant au carré et simplifiant, $A = t^2 - 2tx$, c'est-à-dire

$$x = \frac{t^2 - A}{2t} = \frac{1}{2}\left(t - \frac{A}{t}\right); \qquad \text{d'où} \qquad dx = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{A}{t^2}\right) dt;$$

et il en résulte aussi

$$\sqrt{A+x^2} = t - x = \frac{1}{2}\left(2t - t + \frac{A}{t}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{A}{t^2}\right) t.$$

Donc la différentielle proposée, quotient de dx par $\sqrt{A+x^2}$, devient simplement $\dfrac{dt}{t}$, ou a pour intégrale $\log t$. Et il vient, vu la valeur $x + \sqrt{A+x^2}$ de t,

$$(26) \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{A+x^2}} = \log\left(x + \sqrt{A+x^2}\right) + \text{const.}$$

On contrôle cette intégration, en calculant la dérivée du résultat $\log\left(x + \sqrt{A+x^2}\right)$, dérivée qu'on trouve, successivement, être

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\frac{d}{dx}\left(x + \sqrt{A+x^2}\right)}{x + \sqrt{A+x^2}} &= \frac{1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{A+x^2}}}{x + \sqrt{A+x^2}} \\ &= \frac{\sqrt{A+x^2} + x}{\sqrt{A+x^2}\left(x + \sqrt{A+x^2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{A+x^2}}, \end{aligned}\right.$$

et en constatant qu'elle égale bien la fonction par laquelle dx est multiplié dans la différentielle qu'il s'agissait d'intégrer.

Observons, à ce propos, qu'il ne faut jamais, après avoir effectué un calcul d'intégrale indéfinie, négliger d'en faire ainsi la preuve, par la différentiation toujours possible et même facile du résultat; car, sans cette vérification, on ne pourrait guère avoir l'assurance de ne s'être pas trompé quelque part dans les transformations, généralement longues, que nécessitent les intégrations.

249*. — Autre type, généralisé des deux précédents : intégrales dans lesquelles la fonction sous le signe $\int$ est prise le long d'une courbe unicursale.

(Compléments, p. 24*.)

250. — Troisième type : différentielles qui contiennent deux radicaux carrés, portant sur deux binômes du premier degré.

Considérons, en troisième lieu, les différentielles de la forme

$$f(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{a'x+b'})\, dx,$$

où f désigne une fonction rationnelle quelconque des trois quantités x, $\sqrt{ax+b}$, $\sqrt{a'x+b'}$; en sorte qu'il s'y trouve deux radicaux carrés portant sur deux fonctions linéaires. Prenons l'un de ces radicaux pour nouvelle variable, en posant, par exemple,

$$\sqrt{ax+b} = t: \quad \text{d'où} \quad ax+b = t^2, \quad x = \frac{t^2-b}{a}, \quad dx = \frac{2t\,dt}{a}.$$

L'expression à intégrer, $f(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{a'x+b'})\,dx$, deviendra $f\left[\frac{t^2-b}{a}, t, \sqrt{\frac{a'}{a}(t^2-b)+b'}\right]\frac{2t\,dt}{a}$, différentielle dans laquelle il ne paraît plus qu'un seul radical carré, portant sur l'expression du second degré $\frac{a'}{a}t^2+\left(b'-\frac{a'}{a}b\right)$. Elle rentre par conséquent dans le deuxième type traité ci-dessus; et une nouvelle substitution, empruntée à l'un des trois procédés qui s'y rapportent, la rendra rationnelle ou permettra de l'intégrer.

251. — Quatrième type de différentielles irrationnelles : différentielle binôme $(ax^\alpha + bx^\beta)^p\,dx$.

Passons à un quatrième type assez usuel de différentielles irrationnelles, type se distinguant des précédents en ce qu'on ne sait l'intégrer sous forme finie que dans certains cas spéciaux, dits *cas d'intégrabilité :* c'est celui des *différentielles binômes.* On appelle ainsi les expressions de la forme $(ax^\alpha + bx^\beta)^p\,dx$, où l'exposant p doit être supposé fractionnaire: car, s'il était entier, positif ou négatif, la puissance $p^{\text{ième}}$ du binôme $ax^\alpha + bx^\beta$ se développerait exactement, en numérateur ou en dénominateur, sous la forme d'un polynôme fini contenant des puissances entières de x^α ou x^β; et il ne resterait, tout au plus, que des irrationnelles monômes (pour α ou β fractionnaires), de sorte qu'on serait ramené au premier type.

En mettant le binôme $ax^\alpha + bx^\beta$ sous la forme $x^\alpha(a + bx^{\beta-\alpha})$, la différentielle proposée devient $x^{\alpha p}(a + bx^{\beta-\alpha})^p\,dx$, ou, plus simplement, $x^m(a+bx^n)^p dx$ si l'on pose $\alpha p = m$ et $\beta - \alpha = n$. C'est d'ordinaire à cette forme, $x^m(a + bx^n)^p\,dx$, que l'on réduit les différentielles binômes. On peut même y supposer m et n entiers; car, lorsque

ces exposants sont des fractions $\frac{k}{q}$, $\frac{l}{q}$ (censées réduites à un même dénominateur positif q), en prenant le radical $x^{\frac{1}{q}}$ pour nouvelle variable, ou posant

$$x^{\frac{1}{q}} = t \quad \text{et, par suite,} \quad x = t^q, \quad dx = qt^{q-1}\,dt, \quad x^{\frac{k}{q}} = t^k, \quad x^{\frac{l}{q}} = t^l,$$

on obtient, pour la différentielle proposée, $qt^{k+q-1}(a+bt^l)^p\,dt$; ce qui, abstraction faite du facteur constant q et à part la substitution de t à x, est bien une différentielle binôme de la forme

$$x^m(a+bx^n)^p\,dx,$$

dans laquelle les deux exposants m et n de la variable ont les valeurs entières $k+q-1$ et l. Une remarque dont nous aurons besoin tout à l'heure est que, dans cette transformation, le rapport $\frac{m+1}{n}$ ne change pas : il était d'abord $\dfrac{\frac{k}{q}+1}{\frac{l}{q}} = \frac{k+q}{l}$, quand on avait $m = \frac{k}{q}$, $n = \frac{l}{q}$; et il est aussi $\frac{k+q}{l}$ maintenant que $m = k+q-1$, $n = l$.

Cela posé, tous les moyens que l'on connaît, pour intégrer en termes finis, quand c'est possible, la différentielle binôme $x^m(a+bx^n)^p\,dx$, reviennent à mettre cette expression sous l'une des deux formes, évidemment équivalentes, $x^m(a+bx^n)^p\,dx$, $x^{m+np}(b+ax^{-n})^p\,dx$, et à prendre pour nouvelle variable la quantité entre parenthèses, qui est $a+bx^n$ dans le premier cas, $b+ax^{-n}$ dans le second.

Posons, par exemple,

$$a+bx^n = t, \quad \text{d'où} \quad x = \left(\frac{t-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} \quad \text{et} \quad dx = \frac{1}{n}\,\frac{1}{b^{\frac{1}{n}}}(t-a)^{\frac{1}{n}-1}\,dt.$$

L'expression proposée, $x^m(a+bx^n)^p\,dx$, deviendra

$$\frac{1}{n}\,\frac{1}{b^{\frac{m+1}{n}}}(t-a)^{\frac{m+1}{n}-1}t^p\,dt;$$

et elle ne contiendra que l'irrationnelle monôme t^p si l'exposant, $\frac{m+1}{n}-1$, de $t-a$, est entier, ou, ce qui revient au même, si

$$\frac{m+1}{n} = \text{un nombre entier.} \tag{28}$$

Cela arrive lorsque l'*exposant de x hors de la parenthèse*, m, accru d'une unité, se trouve être exactement divisible par *l'exposant de x dans la parenthèse*, n. Quand ce cas, dit *premier cas d'intégrabilité*, se présente, la différentielle est donc réduite, par l'introduction de la variable t, au premier type de différentielles irrationnelles étudié plus haut, et, par suite, l'intégration peut se faire en termes finis.

Si l'on prenait la différentielle binôme sous sa deuxième forme, en posant $b+ax^{-n}=t$, des conséquences analogues se produiraient, à cela près que l'exposant de x hors de la parenthèse serait $m+np$, au lieu de m, et, celui de x dans la parenthèse, $-n$, au lieu de n. Ce n'est donc plus pour $\frac{m+1}{n}=$ un nombre entier, mais pour

$$\frac{m+np+1}{-n} = \text{un nomb. entier,} \quad \text{ou} \quad \frac{m+np+1}{n} = \text{un nomb. entier,}$$

c'est-à-dire, enfin, pour

$$\frac{m+1}{n}+p = \text{un nombre entier,} \tag{29}$$

que l'intégration aboutirait. Ce *second cas d'intégrabilité* est toujours distinct du premier : en effet, p se trouvant fractionnaire, les deux nombres $\frac{m+1}{n}$ et $\frac{m+1}{n}+p$ ne peuvent pas être entiers à la fois.

Il est bon de remarquer que la transformation indiquée ci-dessus pour rendre entiers les exposants m et n n'a nullement comme résultat de faire entrer la différentielle binôme dans un des cas d'intégrabilité, ni de l'en faire sortir. Car nous avons vu que cette transformation, qui laisse l'exposant p le même, ne change pas non plus le rapport $\frac{m+1}{n}$. Donc celui-ci, soit pris seul, soit joint à p, donnera ou ne donnera pas un nombre entier autant après qu'avant la transformation.

Citons, comme exemple simple d'une différentielle binôme comprise dans les cas d'intégrabilité, et que nous avons même déjà intégrée (pp. 26 et 31), l'expression $\sin^m x \cos^n x\,dx$, lorsque les exposants m, n y sont entiers. En effet, cette expression, écrite

$$\sin^m x \cos^{n-1} x\, d\sin x \quad \text{ou} \quad \sin^m x (1-\sin^2 x)^{\frac{n-1}{2}}\, d\sin x,$$

devient, en y posant $\sin x = t$, la différentielle binôme

$$t^m (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}\, dt.$$

Elle n'est irrationnelle que dans le cas de n pair, sans quoi l'exposant $p = \frac{n-1}{2}$ de la parenthèse y a une valeur entière. Or, d'autre part, si n est pair, l'un des deux quotients appelés tout à l'heure $\frac{m+1}{n}$ et $\frac{m+1}{n} + p$, qui valent ici $\frac{m+1}{2}$ et $\frac{m+n}{2}$, y sera entier, savoir, le premier ou le second, suivant que m, de son côté, se trouvera impair ou pair; en sorte que la différentielle binôme rentrera soit dans le premier cas d'intégrabilité, soit dans le second. Et c'est pourquoi nous avons réussi, même sans y introduire explicitement la variable auxiliaire t, à en effectuer l'intégration.

En dehors des deux cas d'intégrabilité, on peut, sinon intégrer exactement la différentielle binôme $x^m(a+bx^n)^p\,dx$, du moins y réduire la valeur absolue de l'exposant m d'autant de fois $\pm n$ unités qu'on le veut, et aussi l'exposant p d'un nombre quelconque d'unités. Les procédés employés pour cela présentent une complète analogie avec ceux qui nous ont permis (p. 31) de réduire les exposants m et n dans $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$, analogie toute naturelle, puisque l'expression $\sin^m x \cos^n x\,dx$ est, au fond, une différentielle binôme.

232*. — Réduction de l'exposant hors de la parenthèse et de l'exposant de la parenthèse, dans l'intégration des différentielles binômes et polynômes.

(Compléments, p. 27*.)

233*. — Application à certaines intégrales, réductibles aux intégrales elliptiques des deux premières espèces.

(Compléments, p. 30*.)

VINGT-QUATRIÈME LEÇON.

DES INTÉGRALES DÉFINIES : NOTIONS FONDAMENTALES ET EXEMPLES DIVERS; * FONCTION Γ.

234. — Définitions, notations et considérations générales concernant les intégrales définies.

D'après ce que nous avons vu dès la XXI^{ième} Leçon (p. 5), on appelle *intégrale définie* la somme des valeurs que reçoit successivement une différentielle $f(x)\,dx$, quand on y fait varier avec continuité x depuis une valeur initiale donnée a jusqu'à une autre valeur quelconque, b par exemple; et cette somme, parfaitement déterminée, égale la différence, $F(b)-F(a)$, des deux valeurs, *finale* et *initiale*, que prend l'intégrale indéfinie correspondante $\int f(x)\,dx$, désignée ici par $F(x)$ ou par $F(x)+\text{const}$. La première et la dernière valeur de x sont dites les *deux limites* de l'intégrale définie : la première valeur, a, est la *limite inférieure*, la dernière, b, la *limite supérieure*. Leur différence, $b-a$, constitue l'*intervalle des limites* ou encore l'*étendue* de l'intégrale : elle mesure le *champ d'intégration*, compris entre a et b.

Chacune des valeurs successives de la différentielle $f(x)\,dx$ est un *élément* de l'intégrale, tandis que leur expression commune, $f(x)\,dx$, s'appelle l'*élément* général. Par exemple, si n désigne le nombre (extrêmement grand, infini même, à la limite) des variations éprouvées par x depuis $x=a$ jusqu'à $x=b$, et si, de plus, x_0 exprimant la première valeur, a, on représente les valeurs suivantes par $x_1, x_2, \ldots$, jusqu'à la dernière, x_n, qui n'est autre que b, les divers éléments de l'intégrale définie seront les produits $f(x_0)dx_0, f(x_1)\,dx_1, f(x_2)dx_2, \ldots, f(x_{n-1})\,dx_{n-1}$, où les facteurs $dx_0, dx_1, dx_2, \ldots, dx_{n-1}$ seront les accroissements infiniment petits successifs de x, savoir, respectivement, $x_1-x_0, x_2-x_1, x_3-x_2, \ldots, x_n-x_{n-1}$, accroissements d'ailleurs arbitraires quant à leurs signes et à leurs rapports mutuels. La somme de tous ces éléments, c'est-à-dire l'intégrale définie, constituera bien l'augmentation totale, $F(b)-F(a)$, de la fonction $F(x)$, vu que, d'après la définition de celle-ci, on a sans cesse $f(x)\,dx=d\,F(x)$.

Ainsi, de quelque manière *continue* que varie, à partir de a et jusqu'à b, la quantité x, soit en augmentant ou en diminuant toujours, soit en passant par plusieurs alternatives d'accroissement et de décroissement, il viendra

$$(1)\quad f(x_0)\,dx_0 + f(x_1)\,dx_1 + \ldots + f(x_{n-1})\,dx_{n-1} \text{ ou } \int f(x)\,dx = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a).$$

Longtemps on a représenté une telle intégrale définie par $\int f(x)\,dx$, sans y faire figurer les limites, inférieure et supérieure, qui en fixent l'étendue et rendent sa signification déterminée. Fourier, géomètre éminent du commencement de ce siècle, a très heureusement complété cette notation en inscrivant, au bas du signe $\int$, la limite inférieure et, au haut du même signe, la limite supérieure. Par exemple, l'intégrale ci-dessus s'écrira $\int_a^b f(x)\,dx$ et s'énoncera *somme* (ou *intégrale*), *depuis a jusqu'à b, de* $f(x)\,dx$. On a eu de même, plus récemment, l'idée d'exprimer la différence, $\mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$, des deux valeurs que prend une fonction $\mathrm{F}(x)$ à deux limites b et a, en mettant entre crochets ou entre parenthèses l'expression considérée et en inscrivant, à la suite, les deux limites, l'une a, au bas, l'autre b, en haut. Grâce à ces notations, la relation (1) se mettra donc sous la forme très condensée

$$(2)\qquad \int_a^b f(x)\,dx = [\mathrm{F}(x)]_a^b.$$

253. — Propriétés diverses qui en résultent.

Plusieurs remarques importantes découlent immédiatement des considérations qui précèdent.

1° *On peut partager la suite des éléments de l'intégrale en un nombre quelconque de groupes, contenant chacun une infinité d'éléments consécutifs, et constituant tout autant d'intégrales partielles.* On fera, par exemple, varier x non pas, d'un seul coup, de a à b, mais de a à une valeur quelconque c, puis de c à une autre valeur quelconque h, et ainsi de suite, pourvu que, finalement, x s'arrête à la valeur b : c'est ce qu'exprimera, par exemple, l'égalité

$$(3)\qquad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^h f(x)\,dx + \int_h^b f(x)\,dx.$$

Et rien n'obligera même à prendre, pour les limites auxiliaires c, h, ..., des quantités comprises entre les limites données a, b: car

nous avons vu que x n'est pas astreint à varier toujours dans un même sens, c'est-à-dire de a vers b. Toutefois, pour plus de simplicité et *pour éviter parfois certaines difficultés, provenant de ce que la fonction $f(x)$ pourrait devenir infinie ou mal déterminée en dehors de l'intervalle des limites a, b*, on suppose, à moins d'avis contraire, que x varie constamment de a vers b, en grandissant sans cesse ou diminuant sans cesse, de sorte que tous les dx aient le même signe.

2° *Quand on échange entre elles les deux limites, l'intégrale conserve la même valeur absolue, mais prend signe contraire.* En d'autres termes, $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$. Effectivement, on a, d'après la remarque précédente,

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = \int_a^a f(x)\,dx.$$

Or l'intégrale $\int_a^a f(x)\,dx$ est identiquement nulle, vu qu'elle ne contient point d'éléments, son champ $a-a$ se trouvant réduit à zéro.

On pourra donc toujours, en changeant, s'il le faut, le signe de l'intégrale, avoir une limite supérieure plus grande que la limite inférieure. Comme, de plus, la *variable d'intégration*, x, sera censée aller constamment de sa limite inférieure vers sa limite supérieure, elle croîtra, et *toutes ses différentielles dx seront positives*. C'est ce que nous supposerons désormais à moins d'avis contraire.

3° *Quand, pour toute valeur de x intermédiaire entre les limites a, b, la fonction $f(x)$ se trouve comprise entre deux autres, $\varphi(x)$ et $\psi(x)$, l'intégrale proposée $\int f(x)\,dx$ est aussi comprise entre les deux intégrales $\int \varphi(x)\,dx$ et $\int \psi(x)\,dx$.*

En effet, lorsqu'on a

$$\varphi(x) < f(x) < \psi(x), \tag{4}$$

pour toutes les valeurs considérées de x, il vient, en multipliant les trois membres de cette inégalité par le facteur positif dx,

$$\varphi(x)\,dx < f(x)\,dx < \psi(x)\,dx,$$

et, si l'on fait les sommes des valeurs que reçoivent simultanément les trois membres de celle-ci quand x croît de a à b, la première des trois sommes, $\int_a^b \varphi(x)\,dx$, est moindre que la deuxième, $\int_a^b f(x)\,dx$, laquelle se trouve, elle-même, plus petite que la troisième, $\int_a^b \psi(x)\,dx$.

Ainsi l'on peut bien écrire

$$(5) \qquad \int_a^b \varphi(x)\,dx < \int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b \psi(x)\,dx.$$

Cette remarque permettra d'obtenir deux valeurs approchées, l'une par défaut, l'autre par excès, d'une intégrale définie que l'on ne saurait pas calculer exactement, quand on pourra former deux fonctions très peu inégales $\varphi(x)$, $\psi(x)$, enfermant entre elles, dans tout le champ de l'intégration, la fonction sous le signe $\int$ proposée $f(x)$, et assez simples d'ailleurs pour que leurs produits par dx soient intégrables.

236. — Exemples d'intégrales définies dont le calcul est immédiat.

Après ces aperçus généraux, donnons quelques exemples d'intégrales définies, pour montrer comment leur valeur peut se déduire de l'expression des intégrales indéfinies correspondantes.

1° *Calcul de* $\int_0^1 x^m\,dx$, *où l'exposant* m *est supposé positif.* — On aura, en employant une notation indiquée tout à l'heure,

$$(6) \qquad \int_0^1 x^m\,dx = \left(\frac{x^{m+1}}{m+1}\right)_0^1 = \frac{1}{m+1} - \frac{0}{m+1} = \frac{1}{m+1}.$$

2° *Calcul de* $\int_0^x \frac{dx}{1+x}$ (où la limite supérieure est censée plus grande que -1) *et de* $\int_0^x \frac{dx}{1+x^2}$. — Il vient

$$(7) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^x \frac{dx}{1+x} = [\log(1+x)]_0^x = \log(1+x) - \log 1 = \log(1+x), \\[2ex] \displaystyle\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = (\operatorname{arc\,tang} x)_0^x = \operatorname{arc\,tang} x - \operatorname{arc\,tang} 0 = \operatorname{arc\,tang} x. \end{cases}$$

3° *Calcul de* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$ *et de* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$. — La seconde de ces intégrales ne diffère pas de la première; car, si l'on y pose $x = \frac{\pi}{2} - t$ (d'où $dx = -dt$), on voit que $\sin x\,dx$ devient $-\cos t\,dt$, et que, de plus, t décroît de $\frac{\pi}{2}$ à zéro quand x croît de zéro à $\frac{\pi}{2}$. L'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$ devient donc $-\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos t\,dt$, ou $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt$; ce qui, à

part l'insignifiant changement de nom de la variable, est bien la même chose que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$. On aura

$$(8) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = (\sin x)_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

237. — Autre exemple, consistant dans $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,dx$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x\,dx$ (avec m entier et positif), où le calcul se fait par réductions successives; formule de Wallis.

Des intégrales un peu moins simples à calculer sont les deux précédentes (3°), quand on y affecte, sous le signe $\int$, la fonction $\cos x$ ou $\sin x$ d'un exposant entier et positif quelconque m. On reconnaîtra d'abord, par la même substitution de $\frac{\pi}{2} - t$ à x, que ces deux intégrales continuent, même alors, à ne pas différer l'une de l'autre. Appelons-les, pour abréger, I_m, ou posons, par exemple, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,dx = I_m$. D'après un résultat établi dans la XXII$^{\text{ième}}$ Leçon (p. 32), l'intégrale indéfinie correspondante se réduira au moyen de la formule

$$(9) \qquad \int \sin^m x\,dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos x}{m} + \frac{m-1}{m}\int \sin^{m-2} x\,dx;$$

et il est clair qu'en indiquant la différence des deux valeurs prises par chaque terme du second membre aux limites $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, on obtiendra, pour I_m, l'expression

$$-\frac{1}{m}(\sin^{m-1} x \cos x)_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{m-1}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x\,dx.$$

Or le premier terme de celle-ci (appelé, dans tous les cas analogues, *terme intégré* ou *terme aux limites*) s'annule, à cause du facteur $\sin^{m-1} x$, à la limite inférieure $x = 0$; et il s'annule aussi, à cause du facteur $\cos x$, à la limite supérieure $x = \frac{\pi}{2}$. Ce terme ne donne donc rien dans l'intégrale définie considérée; et il vient simplement

$$(10) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,dx = \frac{m-1}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x\,dx, \qquad \text{ou} \qquad I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2}.$$

Cette relation, en y faisant successivement $m=2$, $m=4$, $m=6$, ..., permettra de trouver I_2, I_4, I_6, ..., à partir de l'intégrale I_0, qui n'est autre que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = (x)_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$. On obtiendra ainsi, pour toutes les valeurs de l'exposant m qui sont paires, ou de la forme $2n$, les intégrales proposées. Il viendra successivement

$$\left\{\begin{array}{l} I_0 = \frac{\pi}{2}, \quad I_2 = \frac{1}{2} I_0 = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2}, \\ I_4 = \frac{3}{4} I_2 = \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{\pi}{2}, \quad \ldots, \quad I_{2n} = \frac{1}{2}\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\frac{\pi}{2}. \end{array}\right.$$

On aura donc

$$(11) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,dx \quad \text{ou} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x\,dx = \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}\frac{\pi}{2}.$$

La même relation (10), en y posant $m=3$, $m=5$, ..., $m=2n+1$, donnera pareillement I_3, I_5, ..., I_{2n+1}, à partir de l'intégrale

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx,$$

qui, d'après (8), a pour valeur l'unité. On trouvera ainsi

$$I_3 = \frac{2}{3} I_1 = \frac{2}{3}, \quad I_5 = \frac{4}{5} I_3 = \frac{2}{3}\frac{4}{5}, \quad \ldots, \quad I_{2n+1} = \frac{2}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{7}\cdots\frac{2n}{2n+1},$$

ou bien

$$(12) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x\,dx = \frac{2}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{7}\cdots\frac{2n}{2n+1}.$$

L'intégrale I_m est donc, alternativement, commensurable et puis affectée de la même irrationnalité que le nombre π, quand la valeur entière de l'exposant positif m, après avoir initialement égalé 1, croît sans cesse d'une unité. Or deux valeurs commensurables consécutives, I_{2n-1} et I_{2n+1} par exemple, comprennent entre elles la valeur incommensurable I_{2n} correspondant à l'indice pair intermédiaire $2n$: car, pour x plus grand que zéro et inférieur à $\frac{\pi}{2}$, $\sin x$ est un nombre positif moindre que 1, dont les puissances successives sont de plus en plus petites; de

sorte que l'on a $\sin^{2n-1}x > \sin^{2n}x > \sin^{2n+1}x$, et, par suite,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1}x\,dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}x\,dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}x\,dx$$

ou

$$(13)\qquad I_{2n-1} > I_{2n} > I_{2n+1}.$$

Par conséquent, le rapport incommensurable $\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}$ se trouve, à la fois, supérieur à l'unité et moindre que le rapport commensurable $\frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}}$, égal, d'après la formule générale (12), à la fraction $\frac{2n+1}{2n}$, dont l'excédent $\frac{1}{2n}$ sur l'unité tend vers zéro quand n grandit. Ainsi $\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}$ tend lui-même vers l'unité; car, si l'on appelle $1+\varepsilon$ sa valeur, ε ne pourra être qu'une partie de $\frac{1}{2n}$.

Or de là résulte, pour le nombre π, ou plutôt pour sa moitié $\frac{\pi}{2}$, qui entre dans la formule de I_{2n}, une expression remarquable, due à Wallis, géomètre anglais du XVII^e siècle ([1]). En effet, l'égalité

$$I_{2n} = (1+\varepsilon)I_{2n+1},$$

si l'on y remplace I_{2n}, I_{2n+1} par leurs valeurs (11) et (12), puis qu'on isole $\frac{\pi}{2}$, donne, en divisant finalement par $1+\varepsilon$,

$$(14)\qquad \frac{\pi}{2(1+\varepsilon)} = \frac{2}{1}\,\frac{2}{3}\,\frac{4}{3}\,\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n-1}\,\frac{2n}{2n+1} = \frac{2^2}{2^2-1}\,\frac{4^2}{4^2-1}\cdots\frac{(2n)^2}{(2n)^2-1}.$$

Faisons croître n indéfiniment, de manière à rendre ε nul, et nous aurons

$$(15)\qquad \frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\,\frac{2}{3}\,\frac{4}{3}\,\frac{4}{5}\,\frac{6}{5}\,\frac{6}{7}\cdots = \frac{2^2}{2^2-1}\,\frac{4^2}{4^2-1}\,\frac{6^2}{6^2-1}\cdots.$$

C'est la formule de Wallis, qui fait, comme on voit, du rapport $\frac{\pi}{2}$ de la demi-circonférence au diamètre, la limite du produit des fractions commensurables ayant pour numérateurs la suite des carrés pairs et pour dénominateurs les nombres impairs immédiatement inférieurs à ces carrés.

([1]) On a déjà vu dans le *Calcul différentiel* (t. I, p. 28*) que la décomposition de $\sin x$ en facteurs y conduit également.

238. — Des intégrales définies dans lesquelles la fonction sous le signe $\int$ devient infinie soit aux limites, soit entre les limites.

Nous avons implicitement admis jusqu'ici que la fonction sous le signe $\int$, $f(x)$, dans l'intégrale considérée $\int_a^b f(x)\,dx$, recevait, entre les deux limites a, b et à ces limites mêmes, des valeurs toutes bien déterminées, finies par conséquent, et que, de plus, les deux limites a, b étaient, elles aussi, deux quantités finies, non moins bien désignées, marquant la première et la dernière valeur de x. Il y a donc lieu d'examiner spécialement ce que pourra être et signifier l'intégrale soit lorsque la fonction $f(x)$ deviendra infinie entre les limites a et b ou à quelqu'une de ces limites, soit lorsque les limites elles-mêmes varieront et tendront à acquérir des valeurs absolues infinies.

Supposons d'abord que la fonction $f(x)$ devienne infinie à une limite, par exemple, à la limite inférieure a. On ne peut pas voir alors directement ce qu'égalent ensemble les éléments $f(x)dx$ correspondant aux valeurs de x infiniment voisines de a, puisque, si le facteur $f(x)$ y croît indéfiniment, l'autre facteur dx, par contre, y tend vers zéro, en sorte que le produit se présente sous une forme indéterminée. Il faudra donc, comme dans toutes les questions d'analyse où surgit une difficulté analogue, éviter la *valeur critique* de x pour laquelle les données et définitions dont on dispose deviennent illusoires, et se contenter d'approcher de plus en plus de cette valeur critique, en cherchant si le résultat que l'on a en vue tend alors vers une limite. S'il y tend en effet, c'est cette limite qui sera naturellement, par raison d'uniformité ou de continuité (t. I, p. 5), la valeur demandée. Si, au contraire, le résultat croît indéfiniment en valeur absolue ou, encore, oscille une infinité de fois sans s'approcher d'aucune quantité fixe, on y verra la preuve que l'expression proposée devient soit infinie, soit indéterminée, et que, n'existant plus en tant que grandeur précise, elle est impropre à définir une quantité.

Par conséquent, dans la question spéciale dont il s'agit, et en admettant, pour fixer les idées, que b soit supérieur à a, on fera varier x à partir non pas de la limite inférieure a, mais d'une autre un peu plus grande, $a+\varepsilon$, où ε désigne une quantité positive très petite; et l'on considérera ainsi l'intégrale $\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$, dans laquelle la valeur critique $x=a$, pour laquelle $f(x)$ devient infinie, est évitée. Ensuite on imaginera que ε s'approche de zéro, ou prenne une nouvelle va-

leur ε_1, plus faible que la première ε; ce qui ajoutera évidemment à l'intégrale un groupe d'éléments ayant pour somme $\int_{a+\varepsilon_1}^{a+\varepsilon} f(x)dx$: et, si l'on reconnaît que, lorsque ε est déjà fort petit, cette somme reste au-dessous de toute quantité très voisine de zéro assignée à l'avance, quelle que soit entre o et ε la valeur de ε_1, on sera évidemment assuré que l'intégrale $\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$ tend, pour $\varepsilon = 0$, vers une limite, vraie valeur cherchée de $\int_a^b f(x)dx$. Au contraire, dans le cas où la fonction $f(x)$, indéfiniment grandissante à l'approche de $x = a$, et y gardant toujours le même signe par raison de continuité, serait telle, que la somme $\int_{a+\varepsilon_1}^{a+\varepsilon} f(x)\,dx$, du groupe d'éléments gagné à raison du décroissement de ε, pût acquérir une certaine valeur finie K quelque petit que fût ε, on obtiendrait évidemment, en faisant décroître ainsi de plus en plus, vers a, la limite inférieure, ou en ajoutant toujours de nouveaux groupes ayant chacun la somme K, un nombre aussi grand qu'on le voudrait d'accroissements égaux à K; et, par suite, l'intégrale proposée $\int_a^b f(x)\,dx$ serait infinie, c'est-à-dire impropre à exprimer aucune quantité déterminée.

Soit, comme exemple, l'intégrale $\int_0^1 \frac{dx}{x^m}$ (avec $m > 0$), où la fonction sous le signe $\int$, x^{-m}, devient infinie à la limite inférieure $x = 0$. On remplacera provisoirement cette limite par une autre très peu supérieure ε, et l'on aura :

$$\left\{\begin{array}{l}
\text{Pour } m < 1,\ \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^m} = \left(\frac{x^{1-m}}{1-m}\right)_\varepsilon^1 = \frac{1-\varepsilon^{1-m}}{1-m} = \frac{1}{1-m} \text{ (à la limite } \varepsilon = 0\text{)}, \\
\text{Pour } m = 1,\ \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^m} = (\log x)_\varepsilon^1 = \log 1 - \log\varepsilon = \log\frac{1}{\varepsilon} = \infty \text{ (à la limite } \varepsilon = 0\text{)}, \\
\text{Pour } m > 1,\ \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^m} = \left(\frac{x^{-m+1}}{-m+1}\right)_\varepsilon^1 = \frac{1}{m-1}\left(\frac{1}{\varepsilon^{m-1}} - 1\right) = \infty \text{ (à la limite } \varepsilon = 0\text{)}.
\end{array}\right.$$

C'est dire qu'une fonction, $f(x)$, inversement proportionnelle à une puissance x^m de la variable ayant son exposant m inférieur à l'unité, croît assez peu vite, à l'approche de $x = 0$, pour laisser, même à cette limite, une valeur finie et déterminée à l'intégrale $\int f(x)\,dx$; mais

qu'elle y rend, au contraire, l'intégrale $\int f(x)dx$ infinie, dès que l'exposant m atteint l'unité. Donc, *lorsqu'une fonction $f(x)$ ne grandira pas plus vite, à l'approche de la valeur critique considérée, que ne le fait près de $x=0$ une puissance de $\frac{1}{x}$ moins rapidement croissante que la première, l'intégrale restera finie et déterminée à l'instant où sa limite atteindra la valeur critique; mais lorsque, au contraire, la fonction $f(x)$ grandira aussi vite ou plus vite, près de la valeur critique, que la fonction $\frac{1}{x}$ à l'approche de $x=0$, l'intégrale $\int f(x)dx$ deviendra infinie à l'instant où l'une de ses deux limites atteindra la valeur critique dont il s'agit.*

Par exemple, dans l'intégrale $\int_0^1 (1-u^2)^{-m}dx$, avec m compris entre zéro et 1, la fonction sous le signe $\int$,

$$(1-u^2)^{-m} \quad \text{ou} \quad (1+u)^{-m}(1-u)^{-m},$$

exprimée, en posant $1-u=x$, par $(2-x)^{-m}x^{-m}$, varie sensiblement, près de la limite $u=1$, comme son facteur $(1-u)^{-m}$, c'est-à-dire comme x^{-m} à l'approche de $x=0$; car son rapport, $(1+u)^{-m}$, à ce facteur $(1-u)^{-m}$ ou x^{-m}, y égale à fort peu près la constante 2^{-m}. Or je dis qu'il résulte de là, pour $\int(1-u^2)^{-m}du$, une valeur finie. En effet, dans les deux intégrales

$$\int_0^1 (1-u^2)^{-m}du \quad \text{et} \quad \int_0^1 (1-u)^{-m}du,$$

le rapport, $(1+u)^{-m}$ ou, très sensiblement, 2^{-m}, de deux éléments voisins de la limite supérieure, et d'ailleurs quelconques mais correspondant tant à une même valeur de u qu'à un même intervalle du, ne variera qu'extrêmement peu avec u; d'où il suit qu'il ne différera pas, d'une manière appréciable, du rapport même des deux sommes respectives, qu'il s'agit d'examiner ici, formées avec ces éléments, depuis une première valeur de u, déjà très peu différente de 1, jusqu'à une autre tendant vers 1. Et comme, dans $\int(1-u)^{-m}du=\int x^{-m}dx$, la somme en question, relative aux très petites valeurs positives de x, a été reconnue évanouissante, elle le sera aussi dans $\int(1-u^2)^{-m}du$.

Si la fonction $f(x)$ est infinie aux deux limites a, b, on ne prendra l'intégrale, provisoirement, qu'entre deux limites, $a+\varepsilon$ et $b-\varepsilon_1$, voisines de a et b, dans l'intervalle desquelles $f(x)$ restera finie; et l'on verra ensuite ce qui arrivera quand, ε et ε_1 s'annulant, les deux limites proposées a, b se trouveront atteintes. Par exemple, la discus-

sion précédente sur l'intégrale $\int_0^1 (1-u^2)^{-m}du$ montrera de même que $\int_{-1}^1 (1-u^2)^{-m}du$ est finie pour les valeurs de m comprises entre zéro et 1. C'est ce que donne immédiatement, dans le cas $m=\frac{1}{2}$, l'intégration effective ; car on a

$$(17)\quad \int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = (\arcsin u)_{-1}^1 = \arcsin 1 - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

Enfin, si la fonction $f(x)$ devient infinie pour certaines valeurs de x, c par exemple, intermédiaires entre les limites a et b, on décomposera l'intégrale en intégrales partielles, telles que $\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx$ et $\int_{c+\varepsilon_1}^b f(x)dx$, se terminant ou commençant à ces valeurs critiques, et dont on exclura même provisoirement les éléments qui en sont voisins, sauf à les restituer peu à peu pour voir ce que l'annulation de ε et ε_1 fera des intégrales partielles. Si ces dernières restent finies même à la limite, l'intégrale proposée, qui est leur somme, sera évidemment finie aussi et bien déterminée. Si, au contraire, quelques-unes deviennent infinies, en étant d'ailleurs toutes positives ou toutes négatives, l'intégrale proposée le sera de même. Enfin, celle-ci devient *indéterminée,* quand les intégrales partielles infinies qui la composent ont des signes divers et, *en l'absence de toute condition réglant leurs différences mutuelles,* se neutralisent dans une mesure arbitraire.

Considérons, par exemple, l'intégrale $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$, dont les éléments sont négatifs de $x=-1$ à $x=0$, positifs de $x=0$ à $x=1$, et où la fonction sous le signe $\int$, $\frac{1}{x}$, devient infinie pour $x=0$. On dédoublera l'intégrale en

$$\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} = [\log(-x)]_{-1}^{-\varepsilon} = \log\varepsilon \quad \text{et} \quad \int_{\varepsilon_1}^1 \frac{dx}{x} = (\log x)_{\varepsilon_1}^1 = -\log\varepsilon_1,$$

dont la somme, $\log\varepsilon - \log\varepsilon_1$ ou $\log\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}$, prend telle valeur qu'on veut si petits que soient ε et ε_1, puisque rien n'oblige à faire tendre le rapport $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}$ vers aucune limite. Ainsi l'intégrale $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$ est indéterminée,

à moins que la nature de la question où elle se présentera n'impose une certaine manière de faire évanouir ε et ε_1, en déterminant leur rapport limite.

252. — Des intégrales définies à champ d'intégration infini.

Considérons actuellement une intégrale définie, $\int_a^b f(x)dx$, dans laquelle on fait grandir indéfiniment en valeur absolue une des limites a, b, ou toutes les deux. S'il arrive que l'intégrale tende en même temps vers une quantité déterminée, celle-ci sera dite sa valeur pour le cas où les limites qu'on a fait varier seraient infinies. Si, au contraire, l'intégrale grandit indéfiniment en valeur absolue, ou se maintient finie sans tendre vers aucune valeur spéciale, on dira qu'elle devient soit infinie, soit indéterminée. Par exemple, ces derniers cas se présentent, respectivement, pour $\int_1^x \frac{dx}{x}$ et $\int_0^x \cos x\,dx$, qui ont leurs valeurs, $\log x$ et $\sin x$, la première, infinie, la deuxième, arbitraire entre -1 et $+1$, quand on y rend infinie la limite supérieure x. Au contraire, l'intégrale $\int_1^x \frac{dx}{x^2}$, exprimée par

$$\left(\frac{-1}{x}\right)_1^x = 1 - \frac{1}{x},$$

tend vers l'unité lorsque sa limite supérieure croît idéfiniment : on aura donc $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = 1$.

Le cas le plus intéressant est évidemment celui où l'intégrale tend de la sorte vers une valeur déterminée, puisqu'elle conserve, même à la limite, une signification précise. Si, dans les éléments qu'elle gagne à mesure que grandit le champ d'intégration, la fonction $f(x)$ finit par changer de plus en plus fréquemment de signe, de manière que ces éléments forment des groupes ayant leurs sommes partielles de signes alternés aussi, et décroissantes jusqu'à l'infiniment petit quand on passe d'un groupe aux suivants, l'intégrale constituera, comme on voit, à la limite, une série de termes décroissants successivement positifs et négatifs, série qu'on sait être toujours convergente. Il est clair qu'alors, pour que l'intégrale reste finie et déterminée, la fonction $f(x)$ ne sera nullement tenue de tendre vers zéro à mesure que la valeur absolue de sa variable grandira. Et elle n'y sera pas tenue davantage si, sans changer de signe, elle présente indéfiniment des

alternatives d'accroissement et de décroissement, assez inégales pour que les valeurs *sensibles* de $f(x)$ aient de moins en moins *de champ*, au point de rendre négligeables les groupes infiniment éloignés d'éléments. Mais *si*, au contraire, $f(x)$ *conserve le même signe et varie sans cesse dans un même sens, sa valeur absolue devra finir par décroître, et même par décroître plus vite que ne le fait celle de la fonction* $\frac{1}{x}$, *sans quoi l'intégrale deviendrait infinie à la limite.*

En effet, quand, par exemple, pour $x > k$ (k étant une très grande constante positive), $f(x)$ décroît aussi lentement ou plus lentement que $\frac{1}{x}$, le rapport de $f(x)$ à $\frac{1}{x}$ ne tend pas vers zéro, et reste supérieur, en valeur absolue, à un certain nombre M. On a donc

$$\int_k^x f(x)\,dx > \int_k^x \frac{M}{x}\,dx = M\log\frac{x}{k} = \infty \quad (\text{pour } x \text{ infini}),$$

de sorte que la somme $\int_k^\infty f(x)\,dx$ est alors infinie. Mais l'intégrale reste finie dès que, pour les grandes valeurs absolues de x, la fonction $f(x)$ est comparable à une puissance de $\frac{1}{x}$ plus rapidement décroissante que la première, c'est-à-dire dont l'exposant soit supérieur à l'unité. En effet, pour $m > 1$ et k positif, on a

$$\int_k^\infty \frac{dx}{x^m} = -\frac{1}{m-1}\left(\frac{1}{x^{m-1}}\right)_k^\infty = \frac{1}{m-1}\left(\frac{1}{k^{m-1}} - \frac{1}{\infty^{m-1}}\right) = \frac{1}{(m-1)k^{m-1}}.$$

Si donc $f(x)$ conserve, pour $x > k$, un rapport fini, moindre qu'un nombre assignable M, à une telle puissance x^{-m} de x, la somme $\int_k^\infty f(x)dx$, se trouvant inférieure à $M\int_k^\infty \frac{dx}{x^m} = \frac{M}{(m-1)k^{m-1}}$, sera évanouissante pour k très grand; et l'intégrale $\int f(x)dx$ ne cessera pas d'être finie et déterminée, quand on rendra infinie sa limite supérieure.

On raisonnerait de même dans le cas où la limite inférieure reculerait jusqu'à $-\infty$.

260. — Exemples d'intégrales qui restent finies quand l'intervalle des limites devient infini.

Voici quelques exemples importants d'intégrales qui restent finies quand une de leurs limites, ou toutes les deux, deviennent infinies.

1° Commençons par l'intégrale $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$, prise soit entre les limites zéro et ∞, soit entre les limites $\mp\infty$, et où a désigne une constante *positive* quelconque. Il viendra immédiatement

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\left(\text{arc tang}\frac{x}{a}\right)_0^\infty = \frac{\text{arc tang}\,\infty - \text{arc tang}\,0}{a} = \frac{\pi}{2a},\\ &\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\left(\text{arc tang}\frac{x}{a}\right)_{-\infty}^\infty = \frac{\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{a} = \frac{\pi}{a}.\end{aligned}\right.$$

2° Évaluons maintenant, entre les mêmes limites 0 et ∞ ou $-\infty$ et ∞, l'intégrale de l'expression $\frac{dx}{\left[\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})\right]^2}$ ou $\frac{dx}{\text{coh}^2 x}$, qui a pour intégrale indéfinie $\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ ou $\text{tah}\,x$, comme on le reconnaît de suite par la différentiation (¹). — La fraction $\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ pouvant aussi s'écrire $\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$ et $-\frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}}$, expressions qui deviennent respectivement la première, 1, pour $x=\infty$, et la deuxième, -1, pour $x=-\infty$, on aura

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{dx}{\text{coh}^2 x} = (\text{tah}\,x)_0^\infty = 1,\\ &\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{\text{coh}^2 x} = (\text{tah}\,x)_{-\infty}^{+\infty} = 1-(-1) = 2.\end{aligned}\right.$$

3° Considérons enfin, entre les limites 0 et ∞, les trois expressions $e^{-ax}dx$, $e^{-ax}\cos bx\,dx$, $e^{-ax}\sin bx\,dx$, où a désigne un nombre constant *positif*, et dont les intégrales indéfinies sont respectivement (pp. 32 et 33)

$$-\frac{1}{a}e^{-ax},\quad -e^{-ax}\frac{a\cos bx - b\sin bx}{a^2+b^2},\quad -e^{-ax}\frac{b\cos bx + a\sin bx}{a^2+b^2}.$$

Il viendra aisément, en observant que e^{-ax} s'annule pour $x=\infty$,

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^\infty e^{-ax}dx = \frac{1}{a},\\ &\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2},\\ &\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx = \frac{b}{a^2+b^2}.\end{aligned}\right.$$

(¹) Je désignerai les sinus, cosinus et tangentes hyperboliques par les notations sih, coh, tah, bien suffisamment explicites, et plus brèves que celles dont j'ai fait usage dans le Tome I, savoir sinh, cosh, tangh.

On remarquera que, lorsqu'on change b en $-b$, tous les éléments de la deuxième de ces intégrales restent les mêmes (car $\cos bx$ ne change pas), tandis que ($\sin bx$ changeant de signe) tous les éléments de la troisième prennent signe contraire. Par suite, des deux expressions simples $\frac{a}{a^2+b^2}$, $\frac{b}{a^2+b^2}$, celle qui a le numérateur a, conservant son signe, pouvait seule convenir à l'intégrale dont l'élément contient le facteur $\cos bx$, et celle qui a le numérateur b, changeant de signe, pouvait seule convenir à l'intégrale dont l'élément contient le facteur $\sin bx$. Enfin, la première intégrale, $\int_0^\infty e^{-ax}dx$, se déduit de la deuxième en posant $b=0$, ce qui réduit $\cos bx$ à l'unité et $\frac{a}{a^2+b^2}$ à $\frac{1}{a}$.

261*. — Autre exemple d'intégrales finies quoique prises dans un intervalle infini : fonction Γ.

(Compléments, p. 35*.)

VINGT-CINQUIÈME LEÇON.

CALCUL APPROCHÉ DES INTÉGRALES DÉFINIES; IDÉE DES INTÉGRALES ELLIPTIQUES ET DES *FONCTIONS ELLIPTIQUES; APPLICATIONS ANALYTIQUES DES INTÉGRALES DÉFINIES.

---

262. — Calcul approché d'une intégrale définie; méthode la plus simple et procédé de Thomas Simpson.

Il arrive souvent qu'une différentielle $f(x)dx$ ne peut pas s'intégrer sous forme finie. Alors on a recours à divers procédés d'approximation. Les uns ont pour but unique d'obtenir des valeurs numériques, et non des expressions générales, des intégrales définies proposées, tandis que l'objet principal des autres est de fournir des développements convergents en série, propres à représenter analytiquement l'intégrale dans la totalité ou dans une partie notable de l'étendue où varient ses limites.

Disons d'abord quelques mots des premiers, destinés aux calculs numériques. Ils consistent, d'ordinaire, à partager le champ d'intégration en intervalles, h, assez petits, pour que les changements de la fonction $f(x)$, de part et d'autre de la valeur x_0 de x correspondant au milieu de chacun d'eux, y soient suffisamment bien exprimés au moyen des deux ou trois premiers termes de leurs développements par la série de Taylor, et à évaluer séparément par l'emploi de ces termes les groupes d'éléments de l'intégrale compris dans chaque intervalle, en fonction de celui-ci, h, et des deux valeurs extrêmes $f\left(x_0 \pm \frac{h}{2}\right)$ qu'y acquiert $f(x)$, quelquefois aussi, quand plus d'exactitude est nécessaire, en fonction de la valeur $f(x_0)$ relative au milieu de l'intervalle.

La formule de Taylor donnant, pour une valeur quelconque $x = x_0 + u$ comprise entre $x_0 - \frac{h}{2}$ et $x_0 + \frac{h}{2}$,

$$f(x_0 + u) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1}u + \frac{f''(x_0)}{1.2}u^2 + \frac{f'''(x_0)}{1.2.3}u^3.$$

avec une erreur ε par défaut égale à $\frac{f^{\text{iv}}(x_0+\theta u)}{1.2.3.4}u^4$ ou dont le rapport à $\frac{f^{\text{iv}}(x_0)}{1.2.3.4}u^4$ diffère généralement peu de 1, il viendra, en multipliant par $dx = d(x_0+u) = du$, puis intégrant de $x = x_0 - \frac{h}{2}$ à $x = x_0 + \frac{h}{2}$, c'est-à-dire entre les limites $u = -\frac{h}{2}$ et $u = \frac{h}{2}$,

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f(x_0+u)\,du = f(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{3}\left(\frac{h}{2}\right)^3,$$

sauf une erreur par défaut composée d'éléments $\varepsilon\,du$ ayant presque le rapport 1 avec $\frac{f^{\text{iv}}(x_0)}{1.2.3.4}u^4\,du$ et, par suite, relativement peu différente elle-même de

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{f^{\text{iv}}(x_0)}{1.2.3.4}u^4\,du = \frac{f^{\text{iv}}(x_0)}{3.4.5}\left(\frac{h}{2}\right)^5.$$

On peut donc écrire, en somme, sous la réserve de l'hypothèse que $f^{\text{iv}}(x)$ soit ou insensible ou relativement peu variable dans l'intervalle considéré h,

$$(1)\qquad \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f(x_0+u)\,du = f(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{3}\left(\frac{h}{2}\right)^3 + \frac{f^{\text{iv}}(x_0)}{3.4.5}\left(\frac{h}{2}\right)^5.$$

Il reste, à remplacer, dans (1), $f(x_0)$ par son expression en fonction des valeurs extrêmes $f\left(x_0 \pm \frac{h}{2}\right)$, si l'on ne veut employer que celles-ci; et, dans le cas contraire où l'on voudrait utiliser également la valeur moyenne $f(x_0)$, il faut éliminer $f''(x_0)$ de (1), ce qu'il est alors possible de faire. Pour atteindre ce double but, on aura très sensiblement, d'après la formule de Taylor,

$$\left\{\begin{aligned} f\left(x_0 \pm \frac{h}{2}\right) = f(x_0) &\pm f'(x_0)\frac{h}{2} + \frac{f''(x_0)}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2 \\ &\pm \frac{f'''(x_0)}{2.3}\left(\frac{h}{2}\right)^3 + \frac{f^{\text{iv}}(x_0)}{2.3.4}\left(\frac{h}{2}\right)^4, \end{aligned}\right.$$

et, par suite,

$$\frac{1}{2}\left[f\left(x_0 - \frac{h}{2}\right) + f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)\right] = f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2 + \frac{f^{\text{iv}}(x_0)}{2.3.4}\left(\frac{h}{2}\right)^4;$$

ce qui donne, en résolvant soit par rapport à $f(x_0)$, soit par rapport au terme $\frac{f''(x_0)}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2$, puis multipliant ou par h, ou par $\frac{h}{3}$,

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &f(x_0)h = \frac{h}{2}\left[f\left(x_0-\frac{h}{2}\right)+f\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\right]-f''(x_0)\left(\frac{h}{2}\right)^3-\frac{f^{\text{IV}}(x_0)}{3.4}\left(\frac{h}{2}\right)^5,\\ &\frac{f''(x_0)}{3}\left(\frac{h}{2}\right)^3 = \frac{h}{6}\left[f\left(x_0+\frac{h}{2}\right)+f\left(x_0-\frac{h}{2}\right)-2f(x_0)\right]-\frac{f^{\text{IV}}(x_0)}{4.9}\left(\frac{h}{2}\right)^5.\end{aligned}\right.$$

Donc la formule (1) devient :

1° Si l'on élimine $f(x_0)$, au moyen de la première (2),

$$(3)\quad \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f(x_0+u)\,du = (\text{sensiblement})\ \frac{h}{2}\left[f\left(x_0-\frac{h}{2}\right)+f\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\right],$$

avec une erreur absolue par excès valant généralement, à fort peu près, $\frac{2}{3}f''(x_0)\left(\frac{h}{2}\right)^3$, ou, par suite, avec une erreur relative sensiblement égale au quotient, $\frac{f''(x_0)}{3f(x_0)}\left(\frac{h}{2}\right)^2$, de cette erreur absolue par $hf(x_0)$;

2° Si l'on élimine, au contraire, $f''(x_0)$, par la seconde (2),

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f(x_0+u)\,dx\\ &\quad = \text{très sensiblement}\ \frac{h}{6}\left[f\left(x_0-\frac{h}{2}\right)+4f(x_0)+f\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\right],\end{aligned}\right.$$

avec l'erreur absolue, encore par excès, mais beaucoup plus faible, $\frac{f^{\text{IV}}(x_0)}{90}\left(\frac{h}{2}\right)^5$ à fort peu près, ou, par conséquent, avec une erreur relative sensiblement égale à $\frac{f^{\text{IV}}(x_0)}{180f(x_0)}\left(\frac{h}{2}\right)^4$.

La première évaluation, (3), qui revient évidemment à supposer la fonction $f(x)$ linéaire dans chaque intervalle h, ou à raisonner comme si l'on y avait $f''(x)=0$, consiste donc à *multiplier l'intervalle considéré h par la moyenne arithmétique des deux valeurs de la fonction aux deux extrémités de cet intervalle*, ou à opérer comme si la fonction était, dans tout l'intervalle, constante, et égale à cette moyenne arithmétique. La seconde évaluation, (4), beaucoup plus précise, mais aussi moins simple, remplace, comme on voit, cette moyenne par une autre, dans laquelle la valeur $f(x_0)$ de la fonction au milieu de l'in-

tervalle intervient concurremment avec les deux valeurs extrêmes, et a même *deux* fois plus d'importance que celles-ci prises *ensemble* ou se trouve affectée du coefficient 4 dans la somme, dont il y a lieu par suite de prendre le sixième. Ce procédé, dû au géomètre anglais Thomas Simpson, revient à supposer du troisième degré seulement la fonction $f(x)$, entre les limites de chaque intervalle; car on voit que l'erreur y serait nulle si l'on avait $f^{\text{IV}}(x) = 0$.

Pour faciliter le calcul et l'addition des valeurs approchées (3) ou (4) des intégrales partielles composant l'intégrale définie proposée, on partage d'ordinaire le champ d'intégration en intervalles h égaux; ce qui permet de mettre $\frac{h}{2}$ ou $\frac{h}{6}$ en facteur commun dans la somme totale et y porte à 2 le coefficient des valeurs de la fonction, $f\left(x_0 \mp \frac{h}{2}\right)$, communes à deux intervalles h successifs. Toutefois, aux endroits du champ d'intégration où les dérivées $f''(x), f^{\text{IV}}(x)$ seraient assez fortes pour rendre beaucoup plus sensibles qu'ailleurs, dans l'hypothèse de h constant, les erreurs, exprimées à peu près par $-\frac{2}{3}f''(x_0)\left(\frac{h}{2}\right)^3$ et par $-\frac{f^{\text{IV}}(x_0)}{90}\left(\frac{h}{2}\right)^5$, il y aura lieu de resserrer les intervalles, pour obtenir les parties correspondantes de l'intégrale avec la même précision que les autres.

263. — Intégration par les séries.

Passons maintenant à l'intégration en série. On dédouble parfois [1], au moyen de l'intégration par parties, l'intégrale proposée en un terme de forme finie, algébrique par exemple, et une intégrale analogue à la proposée, mais d'indice plus élevé ou affectée sous le signe $\int$ d'un exposant plus fort, et s'approchant néanmoins autant qu'on le veut, après un nombre suffisant de dédoublements pareils, d'une intégrale définie connue. La proposée se ramène donc à la série convergente formée par tous les termes (algébriques) qu'en a distraits l'application indéfiniment répétée du dédoublement, et à l'intégrale *résidue*, pour ainsi dire, subsistant encore à la limite et supposée évaluable autrement. Mais les exemples de ce procédé sont assez difficiles, à cause de la dernière opération (le calcul de l'intégrale résidue), et nous nous contenterons de voir ici la méthode la plus usuelle, qui est aussi la plus féconde en résultats simples.

---

(1) Comme nous verrons plus loin, n° 336* (dans le fascicule II).

Elle consiste à développer, quand on le peut, la fonction placée sous le signe $\int$, en une série convergente dans tout le champ d'intégration et dont les termes soient assez peu compliqués pour qu'on puisse trouver leurs fonctions primitives. Alors il suffit de multiplier tous ces termes par la différentielle de la variable et de les intégrer, pour que la somme des résultats forme une nouvelle série convergente, exprimant l'intégrale cherchée.

Supposons, en effet, qu'il s'agisse de calculer, entre deux limites a et x, l'intégrale $\int f(x)dx$, et que l'on ait, dans tout l'intervalle de ces limites,

$$(5) \qquad f(x) = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + R_n,$$

$u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n$ étant certaines fonctions de x, en nombre aussi grand que l'on voudra, et R_n désignant un terme complémentaire qui, lorsque n est assez grand, et pour toutes les valeurs de la variable comprises entre les deux limites a et x, reste inférieur à toute quantité donnée ε, quelque petite qu'on la prenne. Si nous multiplions l'égalité précédente par dx et que nous intégrions chaque terme entre les limites désignées, il viendra

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} \int_a^x f(x)dx = \int_a^x u_0 dx + \int_a^x u_1 dx + \int_a^x u_2 dx + \ldots \\ + \int_a^x u_n dx + \int_a^x R_n dx. \end{aligned} \right.$$

Or, d'après l'hypothèse $R_n < \varepsilon$ (en valeur absolue), chaque élément $R_n dx$ de la dernière intégrale est moindre que εdx, et, par suite, leur somme, $\int_a^x R_n dx$, sera inférieure à $\int_a^x \varepsilon dx = \varepsilon(x-a)$. Mais, pour une valeur donnée de l'intervalle $x-a$ des limites, ce produit $\varepsilon(x-a)$ tend vers zéro avec ε. Si donc on fait croître n indéfiniment, le terme $\int_a^x R_n dx$ s'effacera de plus en plus du second membre de (6) et il viendra bien, à la limite,

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} \int_a^x f(x)dx = \int_a^x u_0 dx + \int_a^x u_1 dx \\ + \int_a^x u_2 dx + \ldots + \int_a^x u_n dx + \ldots. \end{aligned} \right.$$

Il importe même de remarquer que, si la série $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots,$

convergente entre les limites a et x, commençait à devenir divergente à l'instant où x, en s'éloignant de a, atteint une certaine valeur b, et si, par conséquent, pour $x = b$, la valeur du terme R_n, dans (5), ne tendait plus vers zéro quelque grand qu'on prît n, l'intégrale $\int_a^x R_n dx$ pourrait encore, à ce moment, ne pas cesser de tendre vers zéro, ou, autrement dit, la série constituant le second membre de (7) pourrait être encore convergente et représenter l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$. En effet, lorsque la limite supérieure x, supposée déjà très voisine de b, atteint cette valeur extrême b, l'intégrale $\int_a^x R_n dx$, d'abord insensible (comme on vient de voir), ne s'accroît que d'un nombre relativement minime d'éléments, dont la somme peut bien s'annuler à la limite $n = \infty$ quand même le facteur R_n y dépasserait toute grandeur.

Si, par exemple, $f(x)$ reste fini pour $x = b$, et que, à cet instant, la somme $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, sans être convergente, ne grandisse pas indéfiniment avec n, en sorte que l'excès R_n de $f(x)$ sur cette somme soit constamment inférieur, en valeur absolue, à un certain nombre K quelque grand qu'on prenne n, tous les éléments $R_n dx$ dont il s'agit ici seront moindres que $K dx$ et auront leur somme plus faible que la somme $\int K dx$, laquelle s'évanouit à la limite, l'accroissement total $\int dx$ éprouvé par x y étant aussi faible que l'on veut lorsque n devient assez grand. Ainsi, dans ce cas, qui se présente quand, pour $x = b$, la somme $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$ devient divergente sans croître indéfiniment, la série intégrale (7) reste encore applicable à l'instant précis où la série différentielle commence à ne l'être plus, et sa valeur finie égale $\int_a^b f(x)dx$.

On peut en dire autant, pourvu que l'intégrale à évaluer $\int_a^x f(x)dx$ reste finie à la limite $x = b$, dans la plupart des cas où la série $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$ devient infinie à cette limite. Tel est, notamment, celui où les intégrales partielles $\int_a^x u_0 dx$, $\int_a^x u_1 dx$, ... ont toutes même signe et grandissent (en valeur absolue) à mesure que x s'éloigne de a pour s'approcher de b. Alors, en effet, leur somme grandit aussi, mais dans un rapport restreint, puisqu'elle admet la limite supérieure constamment finie $\int_a^x f(x)dx$; et l'on

peut, d'une part, prendre x assez voisin de b pour que $\int_a^x f(x)dx$ ne soit inférieur à $\int_a^b f(x)dx$ que d'une très petite quantité ε, d'autre part, choisir en même temps n assez grand pour que la somme $\int_a^x u_0 dx + \int_a^x u_1 dx + \ldots + \int_a^x u_n dx$ atteigne presque sa valeur limite $\int_a^x f(x)dx$, correspondant à n infini. Cela posé, si l'on fait tendre x vers b sans que n varie, cette somme de $n+1$ termes grandira, mais en se maintenant constamment plus petite que $\int_a^x f(x)dx$, c'est-à-dire d'une fraction seulement de l'intervalle, comparable à ε, existant entre sa valeur primitive et $\int_a^b f(x)dx$. Donc, pourvu qu'on ait pris n assez grand, la somme considérée $\int_a^x u_0 dx + \ldots + \int_a^x u_n dx$ diffère aussi peu qu'on veut de $\int_a^x f(x)dx$, même à la limite $x = b$. C'est dire qu'à ce moment la série (7) est encore convergente et a pour valeur totale $\int_a^b f(x)dx$.

264. — Cas d'une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de la variable.

Supposons, par exemple, que l'intégrale à calculer soit $\int_0^x f(x)dx$, et que, dans tout le champ d'intégration, $f(x)$ puisse être développée, par la formule de Maclaurin, en une série de la forme

$$(8) \qquad f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{n-1} x^{n-1} + A_n x^n + \ldots,$$

où nous admettrons que le rapport de deux coefficients consécutifs, $\frac{A_n}{A_{n-1}}$, tende vers une certaine limite λ à mesure que n grandit. Le rapport, dans la série, d'un terme au précédent tendra en même temps vers la limite λx, plus petite que l'unité (en valeur absolue) toutes les fois que x se trouvera compris entre les deux valeurs extrêmes $\mp \frac{1}{\lambda}$. Par suite, dans l'intervalle de ces deux valeurs, le développe-

ment sera convergent; et l'on pourra y intégrer chaque terme après l'avoir multiplié par dx. Il viendra, pour l'intégrale demandée,

$$(9)\quad \int_0^x f(x)\,dx = A_0\frac{x}{1} + A_1\frac{x^2}{2} + A_2\frac{x^3}{3} + \ldots + A_{n-1}\frac{x^n}{n} + A_n\frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots$$

On voit que le rapport d'un terme au précédent, du $n+1^{\text{ième}}$ au $n^{\text{ième}}$, est, dans cette série intégrale, $\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}x\right)\frac{n}{n+1}$, c'est-à-dire, égal au produit de la valeur $\frac{A_n}{A_{n-1}}x$, qu'il avait dans la série différentielle, par la fraction proprement dite $\frac{n}{n+1}$. Ainsi, la série intégrale a ses termes un peu plus rapidement décroissants que la série différentielle, ou est un peu plus convergente; ce qu'il était aisé de prévoir, puisqu'on savait déjà qu'elle devait rester convergente pour $x = \mp\frac{1}{\lambda}$ dans bien des cas où la série différentielle commencerait à y diverger. Mais on remarquera qu'elle diverge, elle aussi, dès que la limite considérée $\mp\frac{1}{\lambda}$ est dépassée. En effet, $\frac{n}{n+1}$ tendant vers l'unité quand n grandit, la limite du rapport d'un terme au précédent est également λx dans les deux séries; et elles deviennent toutes les deux divergentes pour $\lambda x > 1$ (en valeur absolue), c'est-à-dire hors de l'intervalle compris entre $x = -\frac{1}{\lambda}$ et $x = \frac{1}{\lambda}$.

265. — Application au développement de $\log(1 \pm x)$ et de $\log\frac{1+x}{1-x}$ pour x compris entre -1 et $+1$; emploi de ces développements dans le calcul des logarithmes.

Voyons, par exemple, à quel développement conduira l'intégrale $\int_0^x \frac{dx}{1+x}$, dont la valeur sous forme finie est

$$[\log(1+x)]_0^x = \log(1+x) - \log 1,$$

c'est-à-dire $\log(1+x)$. Nous avons ici $f(x) = (1+x)^{-1}$, expression que nous savons être développable par la formule de Mac Laurin ou, simplement, par celle du binôme, pour les valeurs de x comprises entre -1 et $+1$. Il viendra

$$(10)\qquad (1+x)^{-1} \quad\text{ou}\quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots,$$

comme on le vérifie du reste en observant que les termes 1, $-x$, x^2, ..., constituent une progression par quotient dont la raison est $-x$, et dont la somme limite vaut par suite $\frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x}$, pourvu que la progression soit décroissante, c'est-à-dire pourvu que la raison $-x$ n'atteigne pas l'unité en valeur absolue.

Multiplions les deux membres de (10) par dx et intégrons tous les termes entre les limites zéro, x. Nous obtiendrons la formule cherchée, qui paraît due à Mercator, géomètre du XVII^e siècle :

$$(11)\quad \begin{cases} (\text{pour } x \text{ compris entre } -1 \text{ et } 1) \\ \log(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \end{cases}$$

A la limite $x = 1$, la série (10) cesse d'être convergente, mais sans croître indéfiniment, puisqu'elle se réduit alors à $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ et vaut alternativement 1 et zéro. Donc, d'après ce que nous avons vu tout à l'heure (p. 75), la série intégrale (11) y sera encore convergente et donnera

$$(12)\quad \log 2 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

En changeant, dans (11), x en $-x$, il vient le développement de $\log(1-x)$:

$$(13)\quad \begin{cases} (\text{pour } x \text{ compris entre } -1 \text{ et } +1) \\ \log(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots \end{cases}$$

Enfin, retranchons celui-ci de l'expression (11) de $\log(1+x)$, et nous aurons comme valeur de la différence $\log(1+x) - \log(1-x)$, ou de $\log\frac{1+x}{1-x}$, la série, contenant seulement les puissances impaires de x et, par suite, beaucoup plus convergente que les précédentes :

$$(14)\quad \begin{cases} (\text{pour } x \text{ compris entre } -1 \text{ et } +1) \\ \log\frac{1+x}{1-x} = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots\right). \end{cases}$$

Cette dernière formule sert, étant donné le logarithme népérien d'un nombre quelconque N, à trouver ce qu'il faut lui ajouter pour avoir celui de tout autre nombre plus grand $N + h$. Comme l'excédent dont il s'agit, $\log(N+h) - \log N$, égale $\log\frac{N+h}{N}$, on le mettra sous

la forme $\log\frac{1+x}{1-x}$ en posant $\frac{N+h}{N}=\frac{1+x}{1-x}$, proportion qui devient aisément

$$\frac{(N+h)-N}{(N+h)+N}=\frac{(1+x)-(1-x)}{(1+x)+(1-x)}, \text{ ou } \frac{h}{2N+h}=\frac{2x}{2}, \text{ ou enfin } x=\frac{h}{2N+h};$$

et cette valeur de x sera bien inférieure à l'unité. Ainsi la relation (14) donnera

$$(15)\quad \begin{cases} \log(N+h)-\log N \\ \quad =2\left[\frac{1}{1}\left(\frac{h}{2N+h}\right)^1+\frac{1}{3}\left(\frac{h}{2N+h}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{h}{2N+h}\right)^5+\dots\right]. \end{cases}$$

En prenant, par exemple, $h=1$ et N égal à l'un quelconque des nombres entiers 1, 2, 3, 4, ..., la formule (15) permettra de calculer, par une série d'une convergence toujours rapide, la différence $\log(N+1)-\log N$, qu'il faudra ajouter au logarithme népérien de ce nombre N pour avoir le logarithme naturel du nombre entier suivant $N+1$. Comme le logarithme de 1 est zéro, on fera successivement $N=1, =2, =3, \dots$ et l'on obtiendra rapidement, de proche en proche, les logarithmes népériens des nombres entiers, ou, du moins, de ceux qui sont premiers, les logarithmes des nombres composés s'évaluant encore plus vite par l'addition des logarithmes de leurs facteurs. Enfin, l'on divisera tous ces logarithmes naturels par celui de 10, qu'on trouve être 2,302585..., ou, plus simplement, on les multipliera par son inverse 0,434294..., appelé, comme on sait, *module* des logarithmes *décimaux:* et l'on aura de la sorte ces logarithmes décimaux ou *vulgaires,* puisque les premiers obtenus auront été réduits dans le rapport justement propre à rendre celui de 10 égal à l'unité.

Telle est la méthode la plus simple, en principe, pour calculer une Table de logarithmes, quoiqu'on ait déduit aussi de la formule (15) des procédés particuliers plus expéditifs, permettant, dès que l'on connaît avec une très grande approximation les logarithmes d'une série un peu étendue de nombres entiers, de former successivement ceux de tous les autres par de simples additions ou soustractions.

266. — Autre exemple : développement de arc tang x; application au calcul du nombre π.

Appliquons maintenant à l'intégrale $\int_0^x \frac{dx}{1+x^2}$, dont la valeur sous forme finie est évidemment $(\text{arc tang}\,x)_0^x=\text{arc tang}\,x$, la même mé-

thode qu'à l'intégrale $\int_0^x \frac{dx}{1+x}$. La fonction sous le signe $\int$ étant actuellement $(1+x^2)^{-1}$, au lieu de $(1+x)^{-1}$, il suffira de remplacer x par x^2 dans (10), pour avoir le développement

$$(16) \qquad \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots;$$

et ce développement ne convergera qu'autant que x^2 sera inférieur à 1, ou qu'autant que x n'atteindra pas l'unité en valeur absolue. Entre ces limites $x = -1$ et $x = +1$, la relation (16), multipliée par dx et intégrée de $x = 0$ à $x = x$, donnera la formule cherchée, due au géomètre anglais James Gregory et à Leibnitz :

$$(17) \quad \operatorname{arc\,tang} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \text{ (pour } x \text{ compris entre } -1 \text{ et } 1\text{)}.$$

La série (16) diverge, sans devenir infinie, à la limite $x^2 = 1$, comme il arrivait dans l'exemple précédent à la limite $x = 1$: par suite, et pour la même raison que tout à l'heure, la formule (17) de l'intégrale subsistera même à cette limite $x^2 = 1$, ou pour $x = \pm 1$; et, en y faisant, par exemple, $x = 1$, valeur qui est la tangente de l'arc $\frac{\pi}{4}$, on aura l'expression suivante, très remarquable, du quart du nombre π :

$$(18) \qquad \frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots.$$

Dès que x^2 dépasse l'unité, la formule (17) devient divergente, comme celle, (16), d'où l'on est parti. Mais, alors, le complément $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tang} x$ de l'arc dont la tangente est x se trouve inférieur à $\frac{\pi}{4}$ et a évidemment la cotangente x ou, par suite, la tangente inverse, $\frac{1}{x}$. La formule (17) est donc applicable à ce complément $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tang} x$, avec changement de x en $\frac{1}{x}$; et il vient

$$(19) \qquad \operatorname{arc\,tang} x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \ldots \quad (\text{pour } x > 1).$$

L'expression (17) de $\operatorname{arc\,tang} x$, pour les valeurs absolues de x ne dépassant pas l'unité, nous a déjà fourni la série numérique (18), qui représente $\frac{\pi}{4}$. Mais le calcul de cette série, avec une certaine approximation, ne serait guère praticable, à cause de la faible convergence

qu'elle offre. Aussi préfère-t-on, pour évaluer le nombre π, obtenir $\frac{\pi}{4}$ par une combinaison d'arcs beaucoup plus petits, dont les tangentes, substituées à x dans la formule (17), puissent conduire à des séries rapidement convergentes.

La combinaison que l'on adopte d'ordinaire est celle qu'exprime la relation

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctang} \frac{1}{5} - \operatorname{arctang} \frac{1}{239}. \tag{20}$$

On démontre aisément celle-ci en considérant, entre les deux limites $u = 0$, $u = \frac{\pi}{4}$, l'arc positif u dont la tangente vaut $\frac{1}{5}$, et en évaluant $\operatorname{tang} 2u$, puis tangente $4u$, par la formule classique de la tangente du double d'un arc. Il vient d'abord

$$\operatorname{tang} 2u = \frac{2 \operatorname{tang} u}{1 - \operatorname{tang}^2 u} = \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12};$$

ce qui montre que l'arc $2u$, évidemment compris entre zéro et $\frac{\pi}{2}$, se trouve encore au-dessous de $\frac{\pi}{4}$, dont la tangente égale 1. Mais, $\operatorname{tang} 4u$ étant

$$\frac{2 \operatorname{tang} 2u}{1 - \operatorname{tang}^2 2u} \quad \text{ou} \quad \frac{\frac{10}{12}}{1 - \frac{25}{144}} = \frac{120}{119},$$

il est clair que $4u$, ou $4 \operatorname{arctang} \frac{1}{5}$, dépasse légèrement $\frac{\pi}{4}$, comme l'indique (20); et, si l'on appelle V son petit excédent sur $\frac{\pi}{4}$, excédent qui, d'après (20), doit avoir $\frac{1}{239}$ pour tangente, il viendra bien, en effet,

$$\operatorname{tang} V = \operatorname{tang}\left(4u - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tang} 4u - \operatorname{tang} \frac{\pi}{4}}{1 + \operatorname{tang} 4u \operatorname{tang} \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{1}{119}}{1 + \frac{120}{119}} = \frac{1}{239}.$$

En conséquence, la substitution, dans (20), à $\operatorname{arctang} \frac{1}{5}$ et à

$\operatorname{arc tang} \frac{1}{239}$, de leurs développements fournis par (17), donnera

$$(21)\qquad \frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} - \frac{1}{7.5^7} + \ldots\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3.239^3} + \ldots\right).$$

Les deux séries du second membre convergent très rapidement et permettent d'obtenir en quelques pages de calcul, avec un grand nombre de décimales, la valeur $\pi = 3,14159265\ldots$ du rapport de la circonférence au diamètre.

267. — Troisième exemple d'intégration en série : développement de $\operatorname{arc sin} x$.

Proposons-nous encore de développer suivant les puissances ascendantes de x l'intégrale définie $\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = (\operatorname{arc sin} x)_0^x = \operatorname{arc sin} x$, où la différentielle est censée réelle et où, par suite, x ne varie, sous le signe $\int$, que dans une partie de l'intervalle compris entre ± 1. Le second terme, $-x^2$, sous le radical, se trouvant moindre en valeur absolue que le premier, 1, si ce n'est quand la limite supérieure devient ± 1 et que la variable d'intégration l'atteint, on peut, dans tout l'intérieur du champ de l'intégrale, exprimer en série la fonction sous le signe $\int$, $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, par la formule du binôme, qui nous a donné (t. I, p. 159) le développement de $(1-u)^{-\frac{1}{2}}$. En faisant, dans celui-ci, $u = x^2$, puis multipliant par dx et intégrant chaque terme de zéro à x, il vient la formule cherchée, due à Newton,

$$(22)\qquad \operatorname{arc sin} x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

On remarquera que l'intégrale $\operatorname{arc sin} x$ reste finie quand x atteint ses valeurs extrêmes ± 1 $\left(\text{puisque sa valeur absolue est alors } \frac{\pi}{2}\right)$, que, de plus, les termes du second membre de (22) croissent en valeur absolue quand x s'éloigne de zéro pour s'approcher de ces limites, et sont tous de même signe. Donc, d'après la remarque qui termine le n° 263 (p. 76), le second membre de (22) sera encore convergent, et égal à $\operatorname{arc sin} x$, même à ces limites, quoique sa dérivée y devienne infinie. On peut ainsi poser $x = 1$ dans (22), et si l'on s'en sert, en outre, pour évaluer $\frac{\pi}{2}$ considéré comme étant le triple de $\frac{\pi}{6} = \operatorname{arc sin} \frac{1}{2}$,

on aura les deux expressions suivantes, dont la seconde converge assez vite, du demi-rapport $\frac{\pi}{2}$ de la circonférence au diamètre :

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= 1 + \frac{1}{2}\,\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\,\frac{1}{2n+1} + \ldots,\\ \frac{\pi}{2} &= 3\left[\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{5.2^5} + \ldots + \frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\,\frac{1}{(2n+1)2^{2n+1}} + \ldots\right].\end{aligned}\right.$$

268. — Quatrième exemple : développement des intégrales elliptiques de première et de seconde espèce : table abrégée de leurs valeurs complètes.

Les exemples précédents étaient relatifs à des fonctions inverses d'exponentielles et de tangentes ou sinus, c'est-à-dire aux fonctions transcendantes les plus simples, considérées comme intégrales de certaines différentielles algébriques. Étudions maintenant deux intégrales plus complexes, n'ayant pas eu antérieurement de définition empruntée à quelque fait algébrique ou géométrique élémentaire, et ne devant ainsi leur existence comme fonctions qu'à leur propriété même d'intégrales. Ce sont les deux expressions, dépendantes d'un paramètre positif k supposé moindre que 1 et de la limite supérieure φ de l'intégration :

$$(24)\qquad F(k,\varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},\qquad E(k,\varphi) = \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi.$$

Les notations $F(k,\varphi)$, $E(k,\varphi)$, adoptées pour les désigner, sont dues au géomètre français Legendre, qui a considéré ensemble ces deux fonctions à cause de l'analogie de leurs différentielles, et qui leur a donné[1] le nom d'*intégrales elliptiques*, parce que la seconde, $E(k,\varphi)$, permet, ainsi que nous le reconnaîtrons bientôt, d'évaluer les arcs des ellipses d'excentricité k. La première $F(k,\varphi)$ n'est pas moins utile; car, par exemple, elle exprime le temps dans le problème du mouvement d'un pendule simple dont les angles d'oscillation sont considérables. Legendre appelle, de plus, *module* le paramètre k, et *amplitude* la limite supérieure φ, qui mesure le champ même de l'intégration.

Enfin, il qualifie les intégrales de *complètes*, et les représente par $F^1(k)$, $E^1(k)$, ou même simplement par F^1, E^1, quand l'amplitude φ y

(1) Comme on a déjà vu dans le fascicule II, p. 33*.

a la valeur $\frac{\pi}{2}$, pour laquelle le radical $\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$ prend une fois et une seule, sous le signe $\int$, toutes ses valeurs, allant de 1 à $\sqrt{1-k^2}$, par lesquelles il repasserait dans l'ordre inverse si φ excédait $\frac{\pi}{2}$ pour atteindre π, puis, dans l'ordre direct, entre $\varphi=\pi$ et $\varphi=\frac{3\pi}{2}$, ... Les mêmes éléments se reproduisent évidemment dans tous les champs partiels d'intégration $\frac{\pi}{2}$, comptés à la suite les uns des autres en partant de $\varphi=0$. Donc les fonctions F, E croissent de $2F^1$ et de $2E^1$ chaque fois que leur variable φ augmente de π; et, de plus, elles prennent deux valeurs équidistantes de part et d'autre de F_1 ou de E_1, pour deux valeurs de φ équidistantes elles-mêmes de part et d'autre de $\frac{\pi}{2}$; en sorte qu'il suffit de les calculer directement dans l'intervalle compris entre $\varphi=0$ et $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

A cet effet, développons, comme dans l'exemple précédent, par la formule du binôme ou mieux par celles de $(1-u)^{\mp\frac{1}{2}}$ que nous en avons déduites (t. I, p. 159), les deux fonctions sous le signe $\int$, $(1-k^2\sin^2\varphi)^{\mp\frac{1}{2}}$; ce qui est possible puisque la valeur absolue de $u=k^2\sin^2\varphi$ sera, comme ses facteurs k et $\sin\varphi$, inférieure à l'unité. Puis multiplions par $d\varphi$ et, en indiquant l'intégration de chaque terme, il viendra

$$(25)\quad\left\{\begin{aligned}
F(k,\varphi) &= \varphi+\frac{1}{2}k^2\int_0^\varphi \sin^2\varphi\,d\varphi+\frac{1}{2}\frac{3}{4}k^4\int_0^\varphi \sin^4\varphi\,d\varphi+\ldots\\
&\qquad+\frac{1}{2}\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}k^{2n}\int_0^\varphi \sin^{2n}\varphi\,d\varphi+\ldots,\\
E(k,\varphi) &= \varphi-\frac{1}{2}\frac{k^2}{1}\int_0^\varphi \sin^2\varphi\,d\varphi-\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{k^4}{3}\int_0^\varphi \sin^4\varphi\,d\varphi-\ldots\\
&\qquad-\frac{1}{2}\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\frac{k^{2n}}{2n-1}\int_0^\varphi \sin^{2n}\varphi\,d\varphi-\ldots.
\end{aligned}\right.$$

Or nous savons (pp. 32 et 60) que les intégrales, de la forme $\int_0^\varphi \sin^{2n}\varphi\,d\varphi$, figurant dans ces développements, se dédoublent au moyen de l'intégration par parties, en termes fonctions entières des deux facteurs $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ et en d'autres intégrales analogues, réductibles finalement à $\int_0^\varphi \sin^0\varphi\,d\varphi=\varphi$. Donc les seconds membres de (25)

pourront être entièrement débarrassés des signes $\int$ et deviendront des séries convergentes à termes simplement trigonométriques ou algébriques.

Les termes trigonométriques s'évanouissent même, quand il s'agit d'évaluer les intégrales complètes F^1, E^1, c'est-à-dire quand l'amplitude (ou limite supérieure) φ devient $\frac{\pi}{2}$. Alors, en effet, les intégrales qui paraissent aux seconds membres de (25) deviennent celles que nous appelions $I_2, I_4, \ldots, I_{2n}, \ldots$ dans la dernière Leçon (p. 60), et dont l'expression générale est $\frac{1}{2}\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\frac{\pi}{2}$; de sorte qu'on a

$$(26)\quad \begin{cases} F^1(k) = \dfrac{\pi}{2}\left[1 + \left(\dfrac{1}{2}k\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\dfrac{3}{4}k^2\right)^2 + \ldots + \left(\dfrac{1}{2}\dfrac{3}{4}\cdots\dfrac{2n-1}{2n}k^n\right)^2 + \ldots\right], \\ E^1(k) = \dfrac{\pi}{2}\left[1 - \dfrac{1}{1}\left(\dfrac{1}{2}k\right)^2 - \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{3}{4}k^2\right)^2 - \ldots - \dfrac{1}{2n-1}\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{3}{4}\cdots\dfrac{2n-1}{2n}k^n\right)^2 - \ldots\right]. \end{cases}$$

On voit que $F^1(k)$ présente, dans son développement, un peu moins de complication que $E^1(k)$. Une étude approfondie des deux intégrales E, F a permis de généraliser cette remarque et de reconnaître que la fonction $F(k, \varphi)$ est bien, effectivement, d'une nature plus simple que la fonction $E(k, \varphi)$. Aussi Legendre a-t-il distingué ces deux intégrales elliptiques en qualifiant l'une, $F(k, \varphi)$, d'intégrale de *première espèce*, et l'autre, $E(k, \varphi)$, plus compliquée, d'intégrale de *seconde espèce*, bien que ce fût celle-ci, et non la première, qui eût fourni la dénomination commune d'*intégrale elliptique*.

Les formules (25) et surtout (26) sont peu convergentes quand le module k est voisin de l'unité. Alors il y a lieu de recourir à un développement différent, en introduisant, dans les deux différentielles à intégrer, un module k', égal à $\sqrt{1-k^2}$, que Legendre appelle le *module complémentaire* de k. La fonction sous le signe $\int$, $(1-k^2\sin^2\varphi)^{\mp\frac{1}{2}}$, devient, par la substitution de $1-k'^2$ à k^2,

$$(\cos^2\varphi + k'^2\sin^2\varphi)^{\mp\frac{1}{2}} = (\cos\varphi)^{\mp 1}(1 + k'^2\tang^2\varphi)^{\mp\frac{1}{2}};$$

et, pour k voisin de 1 ou k' assez petit, la quantité $(1+k'^2\tang^2\varphi)^{\mp\frac{1}{2}}$ est développable en une série très convergente procédant suivant les puissances de $k'^2\tang^2\varphi$, sauf pour les valeurs de φ voisines de $\frac{\pi}{2}$ (s'il y a lieu d'en considérer de telles ou que l'amplitude φ approche elle-même de $\frac{\pi}{2}$). Or, en adoptant ce développement, les divers termes à intégrer

sont de la forme $\sin^{2n}\varphi \cos^{-(2n\pm 1)}\varphi\, d\varphi$, que nous savons être exactement intégrable (pp. 26 et 31). Toutefois, quand, sous le signe $\int$, le terme $k'^2 \tang^2\varphi$ du binôme, à l'approche de la limite supérieure, dépassera le premier, 1, c'est suivant les puissances ascendantes du premier terme que se fera, par la formule du binôme, dans la petite partie correspondante du champ de l'intégrale, le développement convergent de la fonction sous le signe $\int$: et les termes à y intégrer, à partir de la valeur de φ pour laquelle $k' \tang\varphi = 1$, seront encore de la même forme générale ou se traiteront d'une manière semblable.

Ces procédés, rendus au besoin plus rapides, pour les valeurs de k qui ne sont ni très petites ni très voisines de l'unité, par d'ingénieuses transformations dues aux plus profonds géomètres du dernier siècle et surtout de celui-ci, ont permis à Legendre, avant même la découverte des meilleures méthodes propres à ces calculs, de construire des Tables *à double entrée* donnant les valeurs de E et de F (ou parfois de leurs logarithmes décimaux), pour un grand nombre de couples de valeurs de k et de φ, très rapprochés les uns des autres.

On peut en extraire, et c'est d'ailleurs ce qu'il a fait aussi, une Table à simple entrée, utile dans quelques questions de Mécanique physique, où soient inscrits les logarithmes décimaux des intégrales complètes E^1, F^1, pour des modules k s'échelonnant, depuis zéro jusqu'à 1, à de petits intervalles, que comblera, s'il le faut, l'interpolation par parties proportionnelles. Voici, réduits à cinq décimales, quelques uns de ces logarithmes, avec les valeurs correspondantes k du module, assimilées au sinus d'un arc θ croissant de zéro à $\frac{\pi}{2}$. Les valeurs de θ y sont exprimées en degrés sexagésimaux, au nombre de 90 dans le quadrant, et chaque module k y vaut par conséquent $\sin\theta$.

θ	log déc. $E^1(\sin\theta)$.	log déc. $F^1(\sin\theta)$.	θ	log déc. $E^1(\sin\theta)$.	log déc. $F^1(\sin\theta)$.
0°...	0,19612	0,19612	65°...	0,06589	0,36338
5...	0,19529	0,19695	70...	0,04859	0,39873
10...	0,19281	0,19944	75...	0,03198	0,44218
15...	0,18869	0,20362	80...	0,01708	0,49878
20...	0,18293	0,20952	85...	0,00547	0,58340
25...	0,17555	0,21722	86...	0,00374	0,60775
30...	0,16657	0,22679	87...	0,00228	0,63736
35...	0,15603	0,23836	88...	0,00112	0,67603
40...	0,14399	0,25207	89...	0,00033	0,73519
45...	0,13054	0,26813	89,5.	0,00009	0,78730
50...	0,11579	0,28681	89,8.	0,00002	0,84782
55...	0,09992	0,30850	89,9.	0,00000	0,88858
60...	0,08316	0,33375	90...	zéro	l'infini

269*. — Transformation montrant la proportionnalité inverse de l'intégrale elliptique complète de première espèce à la moyenne arithmético-géométrique de l'unité et du module complémentaire.

(Compléments, p. 37*.)

270* — Des fonctions elliptiques; théorème d'Euler sur les sinus et cosinus elliptiques d'une somme.

(Compléments, p. 41*.)

271*. — De la double périodicité des fonctions elliptiques.

(Compléments, p. 45*).

272. — Applications analytiques des calculs d'intégrales définies : valeur moyenne (arithmétique) d'une fonction.

On a déjà vu, par la formule de Wallis, et par les développements de $\log(1 \pm x)$, de $\operatorname{arc\,tang} x$, $\operatorname{arc\,sin} x$, etc., que le calcul des intégrales définies comporte d'importantes applications analytiques. Mais il y a encore, même sans entrer dans les domaines de la Géométrie et de la Mécanique ou de la Physique, d'autres applications non moins intéressantes de ce calcul. Telle est, par exemple, la détermination de la valeur moyenne d'une fonction.

Étant donnée une fonction, $f(x)$, d'une variable x que l'on fait croître depuis une certaine limite $x = a$ jusqu'à une autre limite $x = b$, on appelle *valeur moyenne* de cette fonction, dans l'intervalle $b - a$ considéré, la moyenne des valeurs qu'elle prend pour des valeurs de la variable se succédant à intervalles égaux infiniment petits depuis a jusqu'à b. Pour l'exprimer, nommons x_0 la valeur initiale a de x, x_n sa valeur finale b, et, ayant partagé la différence $b - a$ en un nombre très grand n de petits intervalles égaux, $\frac{b-a}{n}$, que nous pourrons désigner par Δx, intercalons entre a et b les valeurs successives $x_1 = x_0 + \Delta x$, $x_2 = x_0 + 2\Delta x$, ..., $x_{n-1} = x_0 + (n-1)\Delta x$, qui forment, avec $x_0 = a$ et $x_n = b$, une série de termes équidistants. Les n valeurs de la fonction correspondant aux n premiers de ces termes ont évidemment pour moyenne $\frac{f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})}{n}$ ou bien, en multipliant haut et bas par Δx et observant, d'une part, que Δx est l'accroissement commun $\Delta x_0 = x_1 - x_0$, $\Delta x_1 = x_2 - x_1$, ..., d'autre part, que $n\Delta x$ égale l'ac-

croissement total, $x_n - x_0$ ou $b - a$, de x,

$$\frac{f(x_0)\Delta x_0 + f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \ldots + f(x_{n-1})\Delta x_{n-1}}{b-a}.$$

Si, actuellement, nous rapprochons les valeurs de $f(x)$ considérées, en faisant croître à l'infini leur nombre n, la limite vers laquelle tendra cette fraction sera justement la valeur moyenne demandée; et, comme la somme $f(x_0)\Delta x_0 + f(x_1)\Delta x_1 + \ldots + f(x_{n-1})\Delta x_{n-1}$ deviendra l'intégrale définie $f(x_0)dx_0 + f(x_1)dx_1 + \ldots + f(x_{n-1})dx_{n-1}$ ou $\int_a^b f(x)dx$, parfaitement déterminée, on aura

$$(45) \qquad \text{Valeur moyenne de } f(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Le calcul de la valeur moyenne de $f(x)$ dans un certain intervalle se ramène donc à celui de l'intégrale $\int f(x)\,dx$ prise dans le même intervalle; et celle-ci, à l'inverse, est elle-même le produit de l'intervalle $b - a$ des limites par la valeur moyenne de $f(x)$. En d'autres termes, *la fonction figurant sous un signe $\int$ peut y être remplacée par sa valeur moyenne entre les limites de l'intégration.*

273. — Exemple : valeurs moyennes de $\sin^m x$ et de $\cos^m x$, où l'exposant m est supposé entier et positif.

Cherchons, par exemple, la valeur moyenne des fonctions $\sin^m x$, $\cos^m x$, où nous admettrons que m soit un exposant entier positif et où nous supposerons x variable de $-\infty$ à ∞. Comme $\sin x$ et $\cos x$ reprennent leurs valeurs primitives lorsque x croît de 2π, en sorte que leurs valeurs individuelles se retrouvent les mêmes dans tous les intervalles d'étendue 2π commençant par n'importe quelle valeur de x, leurs valeurs moyennes seront aussi, évidemment, les mêmes pour toutes ces périodes 2π, et, par suite, pour un intervalle $b - a$ composé d'un nombre indéfiniment croissant de périodes. On pourra même, à cet intervalle $b - a$ très grand, ajouter une fraction quelconque de période sans modifier sensiblement le résultat; car le quotient, par $b - a$, des intégrales $\int \sin^m x\,dx$, $\int \cos^m x\,dx$, prises pour la fraction proposée de période, sera infiniment petit. Donc la moyenne générale des valeurs de $\sin^m x$ et de $\cos^m x$, ou moyenne calculée pour toutes les valeurs réelles de x depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, pourra s'évaluer en ne considérant qu'un intervalle égal à 2π. Et comme même la fonction $\cos x$, identique à $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$, prend à chaque instant la valeur

que recevra le sinus, un quart de période après ou quand x aura grandi de $\frac{\pi}{2}$, les mêmes éléments entreront dans l'expression des deux moyennes, qui, dès lors, ne peuvent différer l'une de l'autre. Il suffit donc d'évaluer celle de $\sin^m x$, en y faisant varier x de zéro à 2π.

Or, si l'exposant m est impair, la fonction $\sin^m x$ recevra, dans la seconde moitié de l'intervalle, c'est-à-dire de $x = \pi$ à $x = 2\pi$, des valeurs égales et contraires à celles qu'elle avait eues dans la première moitié, puisque $\sin x$ et, par suite, $\sin^m x$ changent de signe quand x croît de π. Donc l'expression de la moyenne contiendra des éléments négatifs en même nombre et de même valeur absolue que ses éléments positifs : elle sera nulle. Si, au contraire, l'exposant m est pair, $\sin^m x$ aura toujours le signe *plus*; et la seconde moitié de l'intervalle total, comprise entre $x = \pi$ et $x = 2\pi$, reproduira exactement les mêmes valeurs que la première moitié; en sorte qu'il suffira de considérer celle-ci, c'est-à-dire de prendre la moyenne de $\sin^m x$ pour x croissant de zéro à π. Mais la fonction $\sin^m x$ y recevra encore deux fois les mêmes valeurs; car, de $x = \frac{\pi}{2}$ à $x = \pi$, elle redevient symétriquement ce qu'elle était entre $x = \frac{\pi}{2}$ et $x = 0$. Donc, en définitive, il suffira de faire varier x depuis zéro jusqu'à $\frac{\pi}{2}$; et l'on posera, dans la formule générale (45), $f(x) = \sin^m x$, $a = 0$, $b = \frac{\pi}{2}$. Il en résultera, pour la moyenne cherchée, l'expression $\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,dx$, égale au produit $\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\cdots\frac{m-1}{m}$, d'après la formule (11) [p. 60] de la dernière Leçon.

En résumé, *la moyenne des valeurs de* $\sin^m x$ *ou de* $\cos^m x$, m *désignant un exposant positif et entier, est toujours commensurable : nulle, quand cet exposant se trouve impair, égale à* $\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\cdots\frac{m-1}{m}$, *quand il est pair.*

Dans le cas particulier $m = 2$, elle se réduit à $\frac{1}{2}$. Donc, *la valeur moyenne des carrés* $\sin^2 x$ *ou* $\cos^2 x$ *est* $\frac{1}{2}$, simple moyenne arithmétique de leurs valeurs extrêmes zéro et 1. C'est ce qu'on aurait pu prévoir, en observant que $\sin^2 x$ et $\cos^2 x$, exprimés en fonction de $\cos 2x$, deviennent respectivement $\frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}\cos 2x$ et se réduisent, en moyenne, au terme constant $\frac{1}{2}$, car leur autre terme, proportionnel à $\cos 2x$, est aussi souvent et autant négatif que positif. On l'aurait

trouvé aussi, et même encore plus simplement, en observant que, vu l'égalité des deux moyennes de $\sin^2 x$ et de $\cos^2 x$, chacune d'elles est la moitié de la somme constante $\sin^2 x + \cos^2 x$, qui vaut 1.

274*. — Valeur moyenne géométrique d'une fonction.

(Compléments, p. 48*).

275*. — Application des intégrales définies au calcul approché du reste de certaines séries.

(Compléments, p. 50*.)

VINGT-SIXIÈME LEÇON.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DES INTÉGRALES DÉFINIES : QUADRATURE DES AIRES PLANES ET RECTIFICATION DES COURBES.

276. — Expression générale d'une aire plane.

Passons actuellement aux nombreuses et importantes applications des intégrales définies à la Géométrie : la plus simple est la *quadrature* des surfaces planes, c'est-à-dire l'évaluation de leur *aire* (¹) ou

(¹) *Note sur la notion d'aire.*

Jusqu'à ces derniers temps, les auteurs d'Analyse ne paraissaient pas avoir senti le besoin d'éclaircir, en la dégageant de son fond obscur, cette notion d'*aire*, dans laquelle se résout et s'exprime notre sentiment presque instinctif de la *contenance* ou de l'étendue des figures à deux dimensions, quoiqu'ils eussent, cependant, jugé nécessaire d'analyser l'idée, bien moins complexe, de la longueur des courbes, ou celle de la mesure analogue des surfaces courbes en unités planes. Voilà pourquoi je me propose de suppléer ici, du moins par une note que l'on pourra, si l'on veut, laisser de côté, à cette lacune réellement assez grave, en montrant que l'aire d'une figure plane limitée en tous sens est une quantité déterminée, indépendante de l'orientation de la figure par rapport aux côtés du réseau de carrés que l'on y trace.

J'aurai : 1° à définir l'aire d'une surface; 2° à montrer qu'il est possible d'obtenir cette aire par décomposition de la surface en éléments de forme quelconque, dont il suffit d'ajouter les aires partielles évaluées comme pour des figures de même forme et de dimensions finies; 3° à prouver l'invariabilité de l'aire totale, lors de déplacements quelconques de la surface par rapport aux axes coordonnés.

1. *Définition de l'aire.* — Imaginons que la figure plane proposée AMBM'A (p. 92) soit rapportée à un système d'axes rectangulaires Ox, Oy, et qu'on divise son plan, par des parallèles indéfinies aux axes coordonnés, en carrés ayant pour côté l'unité de longueur, puis, tous ces carrés eux-mêmes, au moyen de parallèles équidistantes de plus en plus rapprochées, en carrés incomparablement plus petits. Le rapport du nombre de ceux-ci compris dans la figure proposée, au nombre des carrés pareils que contiendra un carré de côté égal à 1, tend vers une limite à mesure que les parallèles se rapprochent de plus en plus; et c'est justement cette limite, dont nous allons démontrer l'existence, qui est dite l'*aire* de la figure.

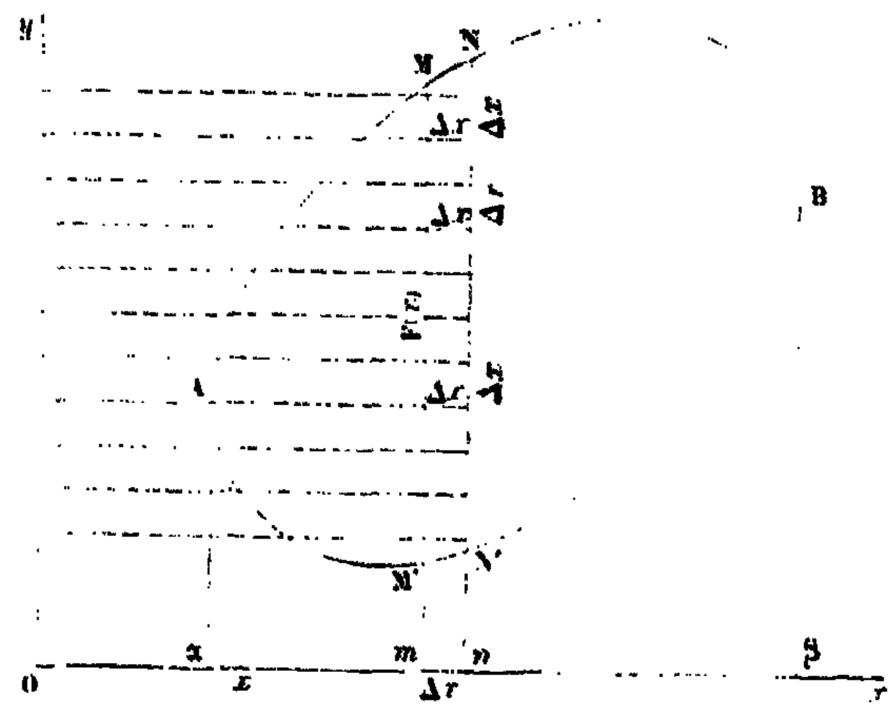
Soit Δx le côté des petits carrés considérés; et, si x est l'abscisse d'une quel-

du rapport qui existe entre l'*étendue* de ces surfaces et celle d'un carré ayant pour côté l'unité de longueur. Cette opération s'appelle

---

conque mM des parallèles à l'axe Oy qui coupent la figure proposée, appelons $F(x)$ la partie de cette parallèle, $M'M$, qu'intercepte la figure et qui, variant en général d'une ordonnée mM à la suivante nN, est bien une certaine fonction de x. Le nombre des petits carrés compris entre les deux ordonnées mM, nN, et enfermés dans le contour donné, égalera évidemment, à une très petite erreur relative près (négligeable à la limite), le quotient $\frac{F(x)}{\Delta x}$ qui indique combien de fois $M'M$ contient le côté des petits carrés. Et le nombre total de ces carrés tracés

Fig. 43.



dans la figure sera évidemment, lui-même, sauf une erreur *relative* également très petite et finalement négligeable, la somme des valeurs que prend ce quotient, $\frac{F(x)}{\Delta x}$ ou $\frac{F(x)\Delta x}{(\Delta x)^2}$, lorsque x y croît, par petits intervalles Δx, depuis une limite très peu différente de l'abscisse, $O\alpha = a$, du point A de la figure qui a l'abscisse la plus petite, jusqu'à une autre très peu différente de l'abscisse, $O\beta = b$, du point B qui a, au contraire, l'abscisse la plus grande. Or, plus Δx est supposé petit, et plus la somme dont il s'agit, $\frac{\Sigma F(x)\Delta x}{(\Delta x)^2}$, a son numérateur voisin de l'intégrale définie $\int_a^b F(x)dx$. On peut donc, avec une erreur relative évanouissante, prendre pour nombre des petits carrés de la figure, $\frac{1}{(\Delta x)^2}\int_a^b F(x)\,dx$. Et comme il est évident que chaque grand carré de côté 1 comprend $\frac{1}{\Delta x}$ files de petits carrés se composant chacune de $\frac{1}{\Delta x}$ carrés, en sorte qu'il contient un nombre de ceux-ci

quadrature (de *quadratum*, carré), soit parce qu'on y rapporte les surfaces à un carré déterminé pris pour unité d'aire, soit parce que

---

égal à $\frac{1}{(\Delta x)^2}$, le rapport du nombre précédent à ce dernier tendra vers le quotient de $\frac{1}{(\Delta x)^2}\int_a^b F(x)\,dx$ par $\frac{1}{(\Delta x)^2}$, ou vaudra, finalement, l'intégrale $\int_a^b F(x)\,dx$.

Ainsi le rapport-limite appelé *aire* de la surface AMBM'A est la quantité $\int_a^b F(x)\,dx$, parfaitement déterminée dans le système des axes coordonnés choisis.

On voit, d'ailleurs, que cette intégrale resterait la même, si, imprimant une *translation* quelconque à la surface proposée, on augmentait les coordonnées x, y de tous ses points, de deux quantités constantes : car cela reviendrait à faire parcourir à tous ces points des droites égales et parallèles, ou à transporter parallèlement à elles-mêmes les droites M'M, N'N, ..., sans changer leurs distances respectives dx; de sorte que l'intégrale $\int_a^b F(x)\,dx$ conserverait en définitive les mêmes éléments, malgré l'augmentation commune éprouvée par ses deux limites a, b. Et cette intégrale ne serait pas altérée davantage, si, faisant tourner la figure autour d'un des axes coordonnés, qu'on peut choisir pour celui, Ox, des abscisses, on l'amenait par retournement dans une position symétrique de la première : vu que chaque partie d'ordonnée, $MM' = F(x)$, interceptée par la courbe, deviendrait, dans la courbe symétrique, la partie analogue d'ordonnée correspondant à la même abscisse x.

Il ressort donc, presque immédiatement, de la définition de l'aire, que cette quantité est la même pour toutes les surfaces égales et pareillement orientées dans le plan, ainsi que pour leurs symétriques par rapport aux axes coordonnés.

2. ***Possibilité d'obtenir l'aire par décomposition de la surface en éléments de forme quelconque.*** — En dénombrant les carrés infiniment petits, de côté dx, compris à l'intérieur de la figure, et qui comptent individuellement dans l'aire totale pour la fraction $(dx)^2$, rien n'empêchera évidemment de les grouper, à volonté, en assemblages quelconques, dont chacun comprendrait une infinité de petits carrés contigus. Et il sera permis, dans ce cas, de négliger les carrés qui se trouveront sur le contour de chaque groupe; car leur nombre disparaîtra devant celui des carrés intérieurs. Autrement dit, l'aire de la surface considérée égale la somme des aires qu'on obtiendrait en découpant cette surface, par des lignes quelconques, en parties aussi petites que l'on voudra, puis, en évaluant chaque partie comme si elle était seule. Rien n'empêchera même de supposer ensuite ces parties indéfiniment décroissantes, de manière à pouvoir négliger une portion relativement infiniment petite de leur totalité (toutes celles, par exemple, qui seront contiguës au contour général), et à pouvoir également remplacer les autres par des éléments différents, ayant avec elles des rapports infiniment voisins de l'unité.

On remarquera que c'est par de telles décompositions, d'une figure, en fragments dont on change d'ailleurs parfois la disposition, que la Géométrie élémen-

les anciens avaient l'habitude de ramener un tel problème à celui où l'on demanderait de changer la surface proposée en un carré équiva-

---

taire parvient à ramener au rectangle, seul évaluable immédiatement, le parallélogramme, le triangle, le trapèze et, même, le secteur circulaire, avec le cercle. Dans les parties plus élevées des Mathématiques, le même principe s'applique à des cas assez nombreux où, pour faciliter les calculs, on divise une surface en éléments (autres que des carrés rectilignes) appropriés à la forme du contour de cette surface.

3. ***Invariabilité de l'aire d'une surface dans toutes les positions possibles de celle-ci.*** — Nous avons montré que l'aire d'une surface plane AMBM'A (p. 92) est une quantité déterminée dans chaque position de la surface par rapport aux axes et qui, de plus, reçoit la même valeur pour cette surface que pour toute autre surface égale orientée pareillement (c'est-à-dire ayant tous ses côtés parallèles aux côtés pareils de la proposée). Mais, pour que la notion d'aire se trouve éclaircie en ce qu'elle a d'essentiel, il nous reste à faire voir que cette quantité est bien propre à la surface et ne tient nullement aux axes rectangulaires choisis, ou, en d'autres termes, qu'elle ne changera pas, si l'on enlève la figure AMBM'A du plan des xy, et qu'on l'y reporte ensuite dans telle position qu'on voudra.

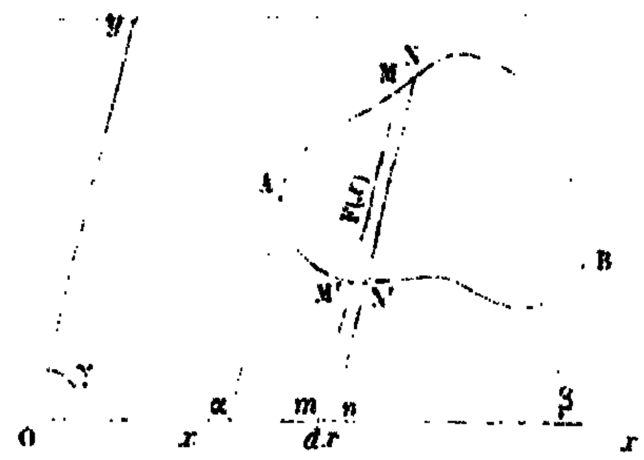
Pour le démontrer, observons d'abord qu'il existe une figure, le cercle, dont l'équation reste la même quand, laissant son centre fixe, on la fait tourner d'une manière quelconque dans le plan, et même lorsqu'on la retourne sens dessus dessous. Donc, pour cette figure, tout déplacement équivaut à une simple translation quant aux circonstances de forme qu'elle présente par rapport aux axes, et son aire sera invariable, d'après ce qui a été démontré.

Or, comparons la surface donnée AMBM'A à un cercle que nous lui supposerons lié et que nous tracerons dans son plan. La comparaison se fera en menant un double système de parallèles équidistantes, liées également à ces deux figures et propres à découper leur plan, par exemple, en carrés très petits égaux (ne se confondant pas, bien entendu, avec ceux, dx^2, *d'orientation invariable*, au moyen desquels s'évaluerait à chaque instant leur aire incomparablement plus grande). Soient m le nombre des carrés qu'entourera le contour de la surface AMBM'A, n le nombre de ceux qui se trouveront de même compris entièrement dans le cercle. Il est évident que, si les parallèles sont assez rapprochées, la figure AMBM'A égalera sensiblement la somme des m carrés contenus à son intérieur; de même, le cercle sera, sauf erreur négligeable, la somme des n carrés qu'il comprendra. Or, quelque position qu'on donne sur le plan des xy à la figure proposée, soit en la déplaçant à volonté sans lui faire quitter ce plan, soit en la retournant, tous ces carrés, qu'elle entraînera dans ses mouvements en même temps que le cercle, ne cesseront pas d'avoir leurs côtés respectivement égaux et parallèles chacun à chacun, ou, en d'autres termes, d'être des figures égales, pareillement orientées et, par suite, d'aires équivalentes. Ainsi, la surface proposée et le cercle ne cesseront pas d'égaler, l'une, m fois, l'autre, n fois, l'un des carrés; en sorte que l'aire de la figure AMBA, restant toujours le produit de celle du cercle, qui est invariable, par un rapport constant $\frac{m}{n}$, sera invariable elle-même. C'est justement ce qu'il fallait démontrer.

lent, opération constituant bien, à proprement parler, la *quadrature* de cette surface.

Soient AMBM'A (*fig.* 44) la figure plane, limitée en tout sens, dont on demande d'évaluer la surface, et Ox, Oy les axes rectilignes,

Fig. 44.



faisant entre eux un angle donné γ, auxquels on la rapporte. Menons une quelconque, mM, des ordonnées qui la coupent et que définira, en position, leur abscisse, $Om = x$. Nous aurons, ici, à considérer spécialement la partie, M'M, de cette ordonnée, qui sera comprise à l'intérieur de la surface AMBM'A; car cette partie M'M *jaugera*, en quelque sorte, la surface dans le sens de mM, et c'est d'elle que dépendra l'étendue à évaluer, du moins pour l'abscisse x ou vis-à-vis du point m. Sa longueur M'M sera évidemment une fonction de x, parfaitement déterminée, et que l'on pourra calculer dans chaque cas si toutes les parties du contour AMBM'A sont bien définies. Nous appellerons $F(x)$ cette fonction. Elle s'obtiendra, par exemple, en menant les deux ordonnées extrêmes $A\alpha$, $B\beta$, entre lesquelles est comprise la surface, et dont nous appellerons respectivement a, b les abscisses $O\alpha$, $O\beta$, puis en prenant, pour chaque abscisse intermédiaire $Om = x$, la différence $mM - mM'$ des deux ordonnées correspondantes de la partie supérieure AMB du contour et de la partie inférieure AM'B, ordonnées qu'on pourra connaître en fonction de x quand la forme et la situation de la figure par rapport aux axes seront désignées.

Cela posé, observons que des ordonnées infiniment voisines, mM, $nN, \ldots$, menées depuis αA jusqu'à βB, découpent la surface en bandes étroites, dont l'une, MM'N'N, par exemple, est comprise entre l'ordonnée mM, d'abscisse x, et l'ordonnée nN, qui a pour abscisse $x + dx$. Or cette bande M'MNN' peut être assimilée à un parallélogramme qui aurait pour un de ses côtés la droite $M'M = F(x)$.

pour côtés contigus à celui-là deux éléments rectilignes égaux et parallèles à $mn = dx$, inclinés, par suite, comme l'axe des x, de l'angle γ par rapport à l'ordonnée mM, enfin, dont le quatrième côté serait situé sur nN. Effectivement, les deux petites parties, en forme de triangles mixtilignes, qu'il faudrait ajouter ou retrancher, l'une, en MN, l'autre, en M'N', pour faire de la bande M'MNN' le parallélogramme en question, ont une dimension, dx, qui leur est commune avec celui-ci, mais l'autre dimension (suivant N'N), infiniment petite en comparaison de la dimension analogue M'M du parallélogramme; de sorte que leur aire se trouve bien négligeable devant l'aire du parallélogramme. Celle-ci égalant, comme on sait, le produit de deux côtés contigus, $F(x)$, dx, par le sinus de l'angle γ qu'ils comprennent, l'expression de la bande M'MNN', c'est-à-dire d'un élément de la surface à évaluer, sera $(\sin\gamma)F(x)dx$.

Par suite, l'aire totale AMBM'A, composée des aires de toutes les bandes pareilles entre αA et βB, sera la somme des valeurs prises successivement par le produit $(\sin\gamma)F(x)dx$ quand x y varie avec continuité depuis l'abscisse, a, du point A jusqu'à celle, b, du point B; ce qui constitue l'intégrale définie $\int_a^b (\sin\gamma)F(x)dx$. En faisant sortir du signe $\int$ le facteur constant $\sin\gamma$, on aura donc, pour l'expression cherchée de la surface AMBM'A,

$$\text{Aire} = (\sin\gamma)\int_a^b F(x)dx: \tag{1}$$

c'est dire que son évaluation reviendra au calcul de l'intégrale définie $\int_a^b F(x)dx$.

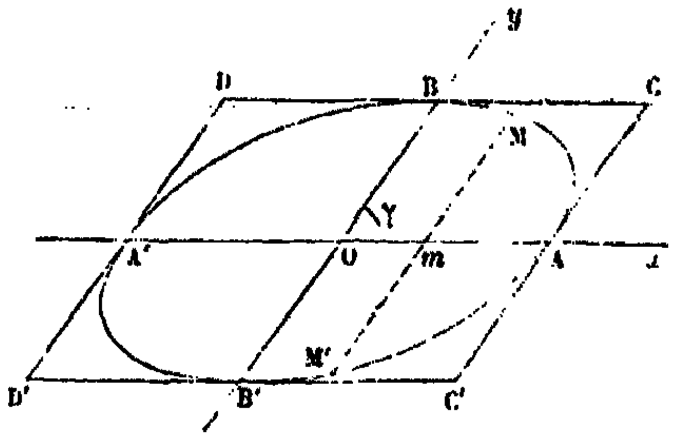
277. — Premier exemple : Aires de l'ellipse et des parallélogrammes (à côtés conjugués) qu'on lui circonscrit.

Comme premier exemple, cherchons la surface que comprend une ellipse ABA'B'A, rapportée à un système de demi-diamètres conjugués $OA = a$, $OB = b$, choisis, le premier, pour axe des x, le second, pour axe des y.

L'équation de la courbe étant, comme on sait, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, les deux ordonnées mM, mM' qui correspondent à une abscisse quelconque $Om = x$, ont respectivement pour valeurs $\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. Leur diffé-

rence algébrique M'M, que nous désignons, en général, par $F(x)$, vaudra donc le double de mM, c'est-à-dire $2\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$. D'ailleurs,

Fig. 45.



l'abscisse la plus petite est, pour toute la courbe, celle, $-a$, du point A', symétrique de A par rapport à l'origine O; et la plus grande est celle, a, du point A. La formule générale (1) deviendra donc

$$\text{(2)} \qquad \text{Aire de l'ellipse} = (\sin\gamma)\int_{-a}^{a} 2\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

Pour simplifier cette expression, observons que, x variant de $-a$ à a, le rapport $\frac{x}{a}$ croît de -1 à 1 et égale, par conséquent, le sinus d'un angle qui grandirait de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$. Appelons u cet angle, et prenons-le pour variable indépendante. Nous aurons $x = a\sin u$; d'où

$$dx = a\cos u\,du, \quad \sqrt{a^2-x^2}\,dx = a^2\sqrt{1-\sin^2 u}\cos u\,du = a^2\cos^2 u\,du;$$

et, comme u varie de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$, la formule (2) deviendra

$$\text{Aire de l'ellipse} = 2ab\sin\gamma\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 u\,du.$$

Or nous pouvons (p. 88) remplacer la fonction sous le signe $\int$, $\cos^2 u$, par sa valeur moyenne dans l'intervalle π des deux limites, valeur que nous avons trouvée (p. 90) être $\frac{1}{2}$; et, l'intégrale se réduisant alors à $\int\frac{du}{2} = \frac{\pi}{2}$, la formule cherchée sera

$$\text{(3)} \qquad \text{Aire de l'ellipse} = \pi ab\sin\gamma.$$

Comparons cette surface à celle du parallélogramme circonscrit

CDD'C', dont les côtés CD, CC' sont respectivement égaux et parallèles aux deux diamètres conjugués, $AA' = 2a$, $BB' = 2b$, qui ont servi d'axes coordonnés. Son aire est le produit $(2a)(2b)\sin\gamma$, et l'on voit que la formule (3) équivaut à la proportion

$$(4)\qquad \frac{\text{Aire de l'ellipse}}{\text{Aire du parallélogramme circonscrit}} = \frac{\pi}{4}.$$

Donc, *l'aire d'une ellipse est le produit, par le facteur constant* $\frac{\pi}{4}$, *de l'aire de tout parallélogramme circonscrit, à côtés orientés suivant deux diamètres conjugués;* d'où il suit évidemment que *tous les parallélogrammes circonscrits à une même ellipse, et qui ont leurs côtés parallèles à deux diamètres conjugués de la courbe, sont équivalents.*

Supposons, en particulier, qu'on ait choisi pour demi-diamètres conjugués OA, OB les demi-axes (rectangulaires) de l'ellipse, dont nous appellerons A le plus grand et B le plus petit. Alors il faudra faire, dans (3), $a = A$, $b = B$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$, et il viendra

$$(5)\qquad \text{Aire de l'ellipse} = \pi AB.$$

On remarquera que si, A restant constant, B grandissait *jusqu'à la valeur* A, l'ellipse finirait par se confondre avec son cercle circonscrit, de rayon A, et que, en même temps, son aire πAB deviendrait πA^2, expression bien d'accord avec celle que donne la Géométrie élémentaire, où, cependant, les éléments de surface choisis étaient délimités par des rayons divergents et non, comme ici, par des cordes parallèles à l'axe des y. De même, si B était invariable, mais que A décrût jusqu'à la valeur B, l'ellipse se réduirait au cercle, de rayon B, qui lui est inscrit; quant à son aire, elle deviendrait πB^2. Et comme on a $\pi AB = \sqrt{(\pi A^2)(\pi B^2)}$, la formule (5) équivaut à l'énoncé suivant, en langage ordinaire :

Une ellipse a pour aire la moyenne proportionnelle entre l'aire de son cercle inscrit et celle de son cercle circonscrit.

278. — Deuxième exemple : aires limitées par des courbes paraboliques.

On appelle quelquefois *parabole de degré n* une courbe dans laquelle l'ordonnée y a pour expression, en fonction de l'abscisse x, un polynôme $f(x)$ du degré n, courbe telle, par suite, que toute droite parallèle à l'axe des y la coupe *à une distance finie* de l'axe des x et *en un seul point.* Mais, dans un sens un peu différent, qui ne com-

prend le précédent que lorsque le polynôme $f(x)$ se réduit à un monôme, on appelle courbe du genre *parabole* toute ligne où l'ordonnée est proportionnelle à la puissance de l'abscisse marquée par un exposant *n positif*, d'ailleurs entier ou fractionnaire à volonté; ce qui donne des ordonnées toujours finies avec x, mais en donne, pour chaque valeur de x, ou deux égales et contraires, ou aucune (au lieu d'une et une seule), dans le cas de n fraction irréductible à numérateur impair et à dénominateur pair. La parabole ordinaire du second degré rentre dans ces deux définitions, savoir : 1° dans la première, quand on y compte les x suivant une tangente quelconque (la tangente au sommet, par exemple) et les y, suivant la parallèle à l'axe menée par le point de contact, d'où résulte pour son équation la forme $y = ax^2$; et, 2°, dans la seconde, avec n fractionnaire, quand ces axes coordonnés échangent leurs rôles ou que, l'équation devenant ainsi $x = ay^2$, y se trouve proportionnel à $\pm x^{\frac{1}{2}}$.

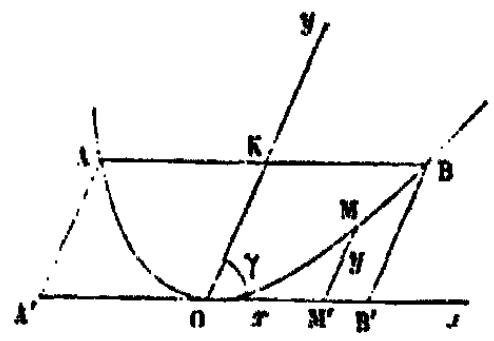
L'aire comprise entre une quelconque de ces courbes, l'axe des x et deux ordonnées fixes s'évalue immédiatement, à cause de la facilité que présente l'intégration d'un polynôme, même quand il n'est pas rationnel ou que les exposants des divers termes y sont fractionnaires.

Considérons, par exemple, la parabole ayant pour équation

$$y = ax^n, \tag{6}$$

et proposons-nous d'évaluer l'aire contenue entre cette courbe OB, l'axe des x et une ordonnée quelconque B'B. Ici la portion M'M

Fig. 46.



d'ordonnée qui est comprise dans la surface se confond avec l'ordonnée même y de la courbe, et l'on a $F(x) = ax^n$. D'ailleurs, l'abscisse x croît, dans cette surface, depuis la valeur zéro, qu'elle a au point de départ supposé O, jusqu'à la valeur OB', que nous pourrons, sans inconvénient, désigner par x. La formule générale (1) (p. 96) donnera donc

$$\text{Aire parabolique OBB}' = (\sin\gamma)\int_0^x ax^n\,dx = \frac{ax^{n+1}\sin\gamma}{n+1} = \frac{x(ax^n)\sin\gamma}{n+1}.$$

Mais on remarquera que, d'après l'équation (6) de la courbe, le produit ax^n, pris à la limite supérieure ou pour $x = \mathrm{OB}'$, représente l'ordonnée correspondante $y = \mathrm{B'B}$. L'expression trouvée pour l'aire égale donc $\frac{xy \sin\gamma}{n+1}$. Or, si nous construisons sur OB′ et B′B le parallélogramme OB′BK, le produit $xy \sin\gamma$, ou $\mathrm{OB}' \times \mathrm{OK} \times \sin \mathrm{B'OK}$, ne sera autre que sa surface. Par suite, la formule ci-dessus revient à celle-ci

$$\text{Aire OBB}' = \frac{\text{Aire OB'BK}}{n+1}; \tag{7}$$

et elle exprime que *l'aire comprise entre une parabole de degré n (à équation binôme), une ordonnée et l'axe des abscisses, égale la $n+1^{\text{ième}}$ partie du parallélogramme construit sur les deux côtés rectilignes qui la délimitent.*

Dans le cas de la parabole ordinaire $y = ax^2$, on a $n = 2$, et l'aire OBB′ vaut le tiers du parallélogramme OB′BK. Ce résultat, remarquable par sa simplicité, est dû à Archimède. Comme il en serait évidemment de même en deçà de l'origine, ou vers les x négatifs que rien n'aurait empêché de choisir pour x positifs, une aire parabolique telle que OA′A, limitée par l'ordonnée A′A égale à B′B et d'une abscisse négative OA′ égale à OA, vaudra aussi le tiers du parallélogramme OKAA′. Par suite, la parabole découpe le parallélogramme total ABB′A′ en deux parties, dont l'une, A′AOBB′, est le tiers de cette figure, et l'autre, AOBK, les deux tiers. Donc, en observant que la distance des deux parallèles A′B′, AB, hauteur du parallélogramme, mesure l'écart maximum de l'arc AOB d'avec sa corde AB, on pourra formuler la règle suivante :

La surface d'un segment AOB *de parabole (ordinaire) s'évalue en multipliant sa base par les deux tiers de sa hauteur.*

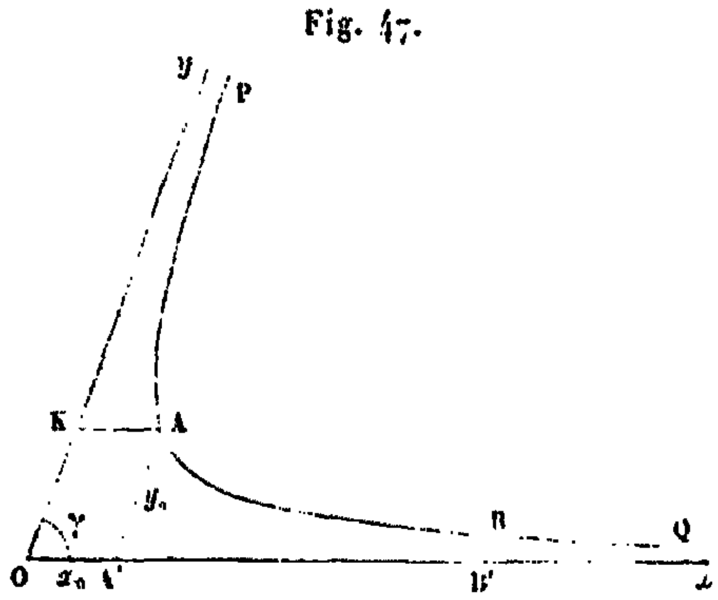
Remarquons enfin que l'aire comprise entre l'axe des abscisses, deux ordonnées quelconques et une parabole d'un degré entier ne dépassant pas le troisième, ou représentée par une équation de la forme $y = f(x) = \mathrm{A} + \mathrm{B}x + \mathrm{C}x^2 + \mathrm{D}x^3$, s'exprimera exactement, en fonction de ces deux ordonnées, de leur intervalle h (différence de leurs abscisses) et d'une ordonnée intermédiaire le divisant en deux intervalles égaux, au moyen de la formule de Simpson (4) [p. 72], qu'il suffira de multiplier par le sinus de l'angle γ des axes s'ils ne sont pas rectangulaires. Nous avons vu, en effet, que la formule d'intégration de Simpson est rigoureuse quand, sous le signe $\int$, la fonction $f(x)$

ne dépasse pas le troisième degré. Cette formule revient donc à assimiler l'intégrale cherchée, $\int_{x_0-\frac{h}{2}}^{x_0+\frac{h}{2}} f(x)\,dx$, à la surface comprise entre un axe des x, les deux perpendiculaires à cet axe définies par les abscisses $x_0 \pm \frac{h}{2}$, et la parabole du *second* degré ayant son axe normal à celui des x avec trois ordonnées, pour $x = x_0$ et $x = x_0 \pm \frac{h}{2}$, égales respectivement aux valeurs correspondantes, $f(x_0)$, $f\left(x_0 \pm \frac{h}{2}\right)$, de la fonction placée sous le signe $\int$.

279. — Troisième exemple : aires hyperboliques.

On sait qu'une hyperbole ordinaire, rapportée à ses asymptotes pour axes coordonnés, a son équation de la forme $xy = c$. Par extension, on nomme *hyperbole*, en général, toute courbe dont l'équation est de la forme analogue $x^\alpha y^\beta = c$, α et β désignant deux exposants entiers et positifs. Pour fixer les idées, nous admettrons qu'on ait appelé y la coordonnée dont l'exposant est le moindre; de sorte qu'on ait $\beta < \alpha$, à l'exception du cas de l'hyperbole ordinaire, où $\beta = \alpha$. La relation $x^\alpha y^\beta = c$, résolue par rapport à y, donnera évidemment y proportionnel à x^{-n}, si n désigne le nombre $\frac{\alpha}{\beta}$, généralement plus

Fig. 47.



grand que 1, mais égal à 1 pour l'hyperbole ordinaire. Donc l'équation de la courbe prendra la forme

$$y = \frac{a}{x^n}, \tag{8}$$

où nous pourrons de plus, en choisissant convenablement les sens des

coordonnées positives, supposer la branche PABQ, qu'il s'agit de considérer, située du côté des x positifs, et avoir aussi $y > 0$ pour $x > 0$, c'est-à-dire a positif. L'ordonnée y décroissant, d'après (8), depuis l'infini jusqu'à zéro, quand x grandit de zéro à l'infini, la branche PABQ de courbe se raccorde asymptotiquement, ou à une distance infinie de l'origine, aux deux axes des x et des y positifs.

Cela posé, soit à évaluer l'aire comprise entre la courbe, l'axe des x et deux ordonnées, A'A, B'B, ayant respectivement les abscisses x_0, x. La formule générale (1) deviendra

$$(9) \qquad \text{Aire} = (\sin\gamma)\int_{x_0}^{x} y\,dx = a\sin\gamma\int_{x_0}^{x} x^{-n}\,dx.$$

S'il ne s'agit pas d'une hyperbole ordinaire et qu'on ait, par suite, vu l'axe des y choisi, $n > 1$, l'intégrale $\int_{x_0}^{x} x^{-n}\,dx$ vaudra $\frac{1}{n-1}\left(\frac{-1}{x^{n-1}}\right)_{x_0}^{x}$ ou $\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{x_0^{n-1}} - \frac{1}{x^{n-1}}\right)$; et l'aire restera finie, pour devenir finalement $\frac{a\sin\gamma}{(n-1)x_0^{n-1}}$, quand on rendra infinie l'abscisse x de B'B, en rejetant ainsi l'ordonnée B'B à l'infini où elle s'annule. Or cette valeur limite, si l'on appelle y_0 l'ordonnée initiale A'A, quotient de a, d'après (8), par x_0^n, pourra s'écrire plus simplement $\frac{x_0 y_0 \sin\gamma}{n-1}$. Elle égalera donc la $(n-1)^{\text{ième}}$ partie du parallélogramme OA'AK construit sur les côtés OA' $= x_0$, A'A $= y_0$; et l'on aura

$$(10) \qquad \text{Aire AA'}x\text{(de longueur infinie)} = \frac{\text{Aire OA'AK}}{n-1} \quad (\text{pour } n > 1).$$

Donc, *quand l'exposant n est supérieur à l'unité, la surface de longueur infinie comprise, au delà d'une ordonnée* AA', *entre la courbe* AQ *et son asymptote choisie pour axe des abscisses, égale seulement le produit, par le facteur constant* $\frac{1}{n-1}$, *du parallélogramme* OA'AK *qui a pour un de ses côtés cette ordonnée et dont le côté opposé est sur l'asymptote parallèle.*

S'il s'agit, au contraire, d'une hyperbole du second degré, la formule (9), où il faudra faire $n = 1$, donnera de suite

$$(11) \qquad \text{Aire AA'B'B} = a\sin\gamma(\log x)_{x_0}^{x} = a\sin\gamma\log\frac{x}{x_0} \quad (\text{pour } n = 1).$$

L'expression de l'aire n'est plus algébrique, mais transcendante, et sa valeur se trouve proportionnelle au logarithme népérien du rapport des deux abscisses extrêmes OB', OA'.

C'est parce que les logarithmes népériens sont ainsi représentés graphiquement par des aires hyperboliques, qu'on leur donne quelquefois le nom de *logarithmes hyperboliques*.

Si l'on fait croître x indéfiniment, le logarithme de son rapport à x_0 devient infini, et la surface AA'B'B ne tend plus vers une limite à mesure que sa longueur augmente. La raison en est que, pour $n=1$, les ordonnées telles que B'B, étant inversement proportionnelles à la première puissance seulement de l'abscisse et non à une puissance plus élevée, finissent par décroître, à mesure que leur abscisse augmente, infiniment moins qu'elles ne faisaient tant que n était supérieur à l'unité : la hauteur des parties de la surface infiniment éloignées de l'origine et, par suite, ces parties mêmes ont donc crû, comparativement, dans un rapport infini.

280. — Quatrième exemple : aire comprise entre un arceau de cycloïde et sa base.

Une décomposition en bandes par les normales successives de la courbe, comme on le fait pour le cercle dans la Géométrie élémentaire, nous a déjà (T. I, p. 225) fait très simplement connaître la surface comprise entre un arceau de cycloïde et sa base. Mais il est bon de la déduire aussi, par la formule (1) [p. 96], d'une décomposition en bandes parallèles $y\,dx$ de largeur uniforme.

Adoptons pour axe des x la base de l'arceau et comme axe des y la tangente au point de départ de celui-ci, de manière à avoir pour la moitié de l'aire proposée l'expression $\int_0^{\pi r} y\,dx$, r désignant le rayon du cercle générateur, et l'intégration s'étendant depuis l'abscisse $x=0$ de l'origine jusqu'à celle $x=\pi r$ du sommet. Cette expression, si l'on y remplace dx par sa valeur tirée de l'équation différentielle de la courbe [t. I, p, 225, formule (4)] $dx=\frac{\sqrt{y}\,dy}{\sqrt{2r-y}}$, et si l'on prend pour variable indépendante l'ordonnée y, qui y croît de zéro à $2r$, devient $\int_0^{2r}\frac{y^{\frac{3}{2}}\,dy}{\sqrt{2r-y}}$. Après l'avoir doublée, intégrons-la par parties,

en observant que

$$\left\{\begin{aligned}\int y^{\frac{3}{2}}\frac{dy}{\sqrt{2r-y}} &= -2\int y^{\frac{3}{2}}\,d\sqrt{2r-y}\\ &= -2y^{\frac{3}{2}}\sqrt{2r-y}+3\int\sqrt{2r-y}\,y^{\frac{1}{2}}\,dy\\ &= -2y^{\frac{3}{2}}\sqrt{2r-y}+3\int\sqrt{2ry-y^2}\,dy,\end{aligned}\right.$$

et que le terme intégré $-2y^{\frac{3}{2}}\sqrt{2r-y}$ s'annule aux deux limites. Nous aurons

$$(12)\qquad \text{Aire de la cycloïde} = 6\int_0^{2r}\sqrt{2ry-y^2}\,dy.$$

Or $\sqrt{2ry-y^2}$, ou $\sqrt{r^2-(y-r)^2}$, exprime les ordonnées d'un demi-cercle, décrit sur la hauteur $2r$ de la cycloïde comme diamètre, et dans lequel on prendrait pour abscisses les y comptés de zéro à $2r$, depuis le milieu de la base jusqu'au sommet de l'arceau. Par suite, l'intégrale $\int_0^{2r}\sqrt{2ry-y^2}\,dy$ représente l'aire $\frac{1}{2}\pi r^2$ de ce demi-cercle; et il vient bien, pour la surface d'un arceau de cycloïde, la valeur $3\pi r^2$, ou trois fois l'aire du cercle générateur de la cycloïde, comme on a vu (t. I, p. 226).

281*. — Cinquième exemple : aire comprise sous le profil longitudinal d'une onde solitaire; relation entre l'ordonnée de ce profil et les deux aires partielles qu'elle délimite.

(Compléments, p. 54*.)

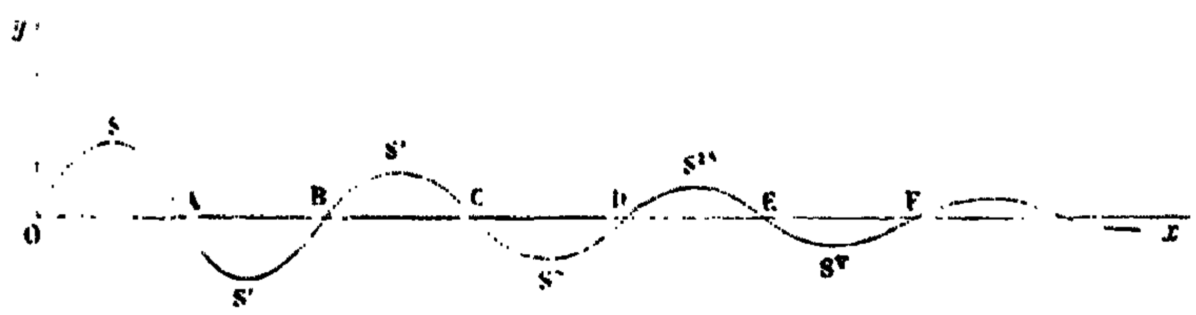
282. — Représentation des intégrales définies, par des aires.

Si l'évaluation d'une aire plane revient à calculer une certaine intégrale définie, à l'inverse, toute intégrale définie, $\int_a^b f(x)dx$, sera graphiquement représentée par la surface plane comprise entre un axe horizontal des x, deux ordonnées verticales ayant pour abscisses respectives $x=a$, $x=b$, et la courbe dont l'équation est, en coordonnées rectangulaires, $y=f(x)$. En effet, les ordonnées successives de cette courbe découperont l'aire considérée en bandes étroites, ayant pour longueur ces ordonnées $y=f(x)$, pour largeur la distance dx de deux d'entre elles et, par suite, pour surface, le produit [pris en valeur absolue] $f(x)dx$, c'est-à-dire les divers éléments de l'in-

tégrale donnée. On voit seulement que, pour la parité de signe de ceux-ci aux bandes élémentaires, et, en conséquence, pour l'exactitude complète de la représentation de l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ par la surface totale comprise, depuis l'abscisse a jusqu'à l'abscisse b, entre la courbe et l'axe des x, il faudra convenir de regarder comme négatives les aires qui correspondront à des éléments $f(x)dx$ négatifs. Si donc x grandit sans cesse en allant de a à b, comme il arrive presque toujours, les aires élémentaires $f(x)dx$ devront être comptées positivement ou négativement, suivant que les ordonnées correspondantes $y=f(x)$ seront elles-mêmes positives ou négatives; et, par conséquent, en admettant, pour fixer les idées, que l'axe vertical des y soit dirigé vers le haut, l'intégrale égalera l'excédent des parties de l'aire comprise entre la courbe et l'axe horizontal des x, qui se trouveront au-dessus de cet axe, sur celles qui seront au-dessous.

Voyons, par exemple, quelle est la surface propre à représenter l'intégrale définie $\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx$, où a est une constante positive et où nous supposerons le coefficient b également positif. Ici, x grandit de zéro à l'infini et, d'autre part, la courbe $y=e^{-ax}\sin bx$, qui serait une sinusoïde sans la présence du facteur positif décroissant e^{-ax}, ne différera d'une sinusoïde qu'en ce que les ordonnées successives y seront réduites de plus en plus, dans le rapport finalement évanouissant e^{-ax}. Il est évident que, sans cette réduction, tous les arceaux, OSA, AS'B, BS''C, ..., qui ont bases égales, auraient aussi même hauteur, même forme et même aire absolue (comprise entre eux et

Fig. 48.



l'axe des x): de sorte que, leur signe se trouvant alternativement positif et négatif, comme celui de leurs ordonnées, l'intégrale exprimerait une somme d'aires égales et *contraires*, qui ne tendrait vers aucune limite déterminée. Mais, comme les hauteurs des arceaux vont en décroissant et que, par suite, de deux bandes ydx ayant même largeur dx avec des abscisses différant d'une longueur d'arceau, la pre-

mière a toujours une plus grande hauteur absolue $\pm y$ que la seconde, l'intégrale définie proposée

$$\int_0^\infty e^{-ax} \sin bx\, dx = \text{aire OSA} - \text{aire AS'B} + \text{aire BS''C} - \ldots$$

sera une série de termes décroissants alternativement positifs et négatifs, série qu'on sait être toujours convergente et du signe affectant son premier terme. Nous avons (p. 68) calculé sa valeur $\frac{b}{a^2+b^2}$, positive, en effet, quand b l'est.

Si, au lieu de $\int_0^\infty e^{-ax} \sin bx\, dx$, nous considérons maintenant l'intégrale $\int_0^\infty e^{-ax^2} \sin bx^2 dx$, la courbe $y = e^{-ax^2} \sin bx^2$ exigera, pour se déduire d'une sinusoïde, non seulement qu'on y rapetisse les ordonnées dans le rapport e^{-ax^2}, plus rapidement décroissant encore que e^{-ax}, mais aussi qu'on les rapproche de plus en plus. L'on devra, en d'autres termes, y prendre dx de plus en plus petit pour que, d'une ordonnée à la suivante, l'arc bx^2 éprouve l'accroissement constant que reçoit l'abscisse dans une sinusoïde où l'on suppose les ordonnées équidistantes. Donc, par le fait de cette double transformation, les arceaux diminueront à la fois de largeur et de hauteur; en sorte que l'intégrale sera toujours une série convergente, positive, de termes décroissants à signes alternés. Cette série restera même convergente si l'on pose $a = 0$ ou $y = \sin bx^2$, vu qu'alors les arceaux, sans décroître en hauteur, se rétréciront de plus en plus et indéfiniment à mesure qu'on s'éloignera de l'origine. L'expression $\int_0^\infty \sin bx^2 dx$ (1) offre donc un exemple du premier des cas, indiqués plus haut (p. 66), où la fonction sous le signe $\int$ n'a pas besoin de tendre vers zéro pour que l'intégrale reste finie et déterminée quand le champ d'intégration devient infini.

L'usage de représenter les intégrales par des aires est si familier aux géomètres, que les mots « *effectuer une quadrature* » et « *évaluer une intégrale* » sont devenus synonymes. On dit, par exemple, qu'un problème est *ramené aux quadratures,* quand on a prouvé que sa solution dépend du calcul d'une intégrale définie.

---

(1) Nous l'évaluerons, au n° 327*, dans le Fascicule II.

283*. — Expressions générales d'une aire plane, en fonction des coordonnées successives d'un point mobile qui en décrit le contour, et de leurs différentielles.

(Compléments, p. 56*.)

284*. — Application à une orbite unicursale; aire du folium de Descartes.

(Compléments, p. 59*.)

285*. — Évaluation des secteurs plans; signification des cosinus et sinus hyperboliques d'un double secteur d'hyperbole équilatère.

(Compléments, p. 61*.)

286. — De la rectification des courbes : formule générale.

La *rectification* d'une courbe, c'est-à-dire son déroulement ou sa transformation en une droite équivalente, consiste, au point de vue analytique, à calculer la longueur d'un arc quelconque de cette courbe.

Après avoir choisi trois axes rectangulaires des x, y, z, donnons-nous, sous la forme $y=f(x)$, $z=\varphi(x)$, les deux équations de la branche déterminée de courbe dont il s'agira d'évaluer un arc, et soient a, b les abscisses des deux extrémités, ou supposons que x croisse, le long de l'arc, depuis a jusqu'à b. Nous savons que les éléments ds de l'arc admettront l'expression générale $\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$, c'est-à-dire $\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx$ ou $\sqrt{1+f'(x)^2+\varphi'(x)^2}\,dx$. Donc l'arc cherché lui-même sera évidemment donné par la formule

$$(72)\qquad \text{Arc} = \int_{x=a}^{x=b} ds = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2+\varphi'(x)^2}\,dx;$$

et il y aura, pour l'obtenir, à effectuer la même intégration que si l'on demandait la surface comprise, dans l'intervalle des deux abscisses a, b, entre l'axe de ces abscisses x et la ligne plane dont l'ordonnée égalerait $\sqrt{1+f'(x)^2+\varphi'(x)^2}$.

Quand la courbe proposée se trouve dans le plan des xy ou seulement parallèle à ce plan, la fonction $z=\varphi(x)$ est constante et l'expression à intégrer devient simplement $\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$.

Comme nous avons déjà, dans le Tome I, en appliquant la deuxième propriété générale des développées, rectifié plusieurs courbes importantes qui sont les développées d'autres courbes connues et, notam-

ment, trouvé ainsi, au moyen de constructions géométriques aisées à traduire en formules, la longueur d'un arc quelconque soit de seconde parabole cubique (p. 212), soit de cycloïde (p. 222), soit même de spirale logarithmique (Fascicule II, p. 205*), nous pourrons nous contenter ici d'appliquer la formule (22), prise avec $z' = 0$ ou $\varphi'(x) = 0$, à des arcs de parabole ordinaire et d'ellipse.

287. — Rectification de la parabole.

Rapportons la parabole considérée à sa tangente au sommet pour axe des x et à son axe de symétrie pour celui des y. Si p désigne le demi-paramètre (distance du foyer à la directrice), l'équation de la courbe sera, comme on sait, $x^2 = 2py$, c'est-à-dire $y = \frac{x^2}{2p}$; et l'on en déduira $y' = \frac{x}{p}$, d'où résultera, pour un arc élémentaire $ds = \sqrt{1 + y'^2}\,dx$, la valeur $\sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}}\,dx$. Si donc nous admettons que l'arc s à évaluer doive partir du sommet $x = 0$ et arriver ainsi jusqu'au point quelconque dont l'abscisse est x, nous aurons

$$(23)\qquad s = \int_0^x \sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}}\,dx = \frac{1}{p}\int_0^x \sqrt{p^2 + x^2}\,dx.$$

La différentielle $\sqrt{p^2 + x^2}\,dx$, à intégrer, rentre dans le deuxième type des différentielles irrationnelles étudiées plus haut (p. 48), et, par suite, la quadrature demandée est effectuable sous forme finie. Le plus simple, pour la faire, consiste à intégrer par parties, en écrivant successivement

$$\int \sqrt{p^2 + x^2}\,dx = x\sqrt{p^2 + x^2} - \int x\,d\sqrt{p^2 + x^2} = x\sqrt{p^2 + x^2} - \int x \frac{x\,dx}{\sqrt{p^2 + x^2}},$$

et à observer que le dernier terme, $-\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{p^2 + x^2}}$, équivaut à

$$\begin{aligned} -\int \frac{(p^2 + x^2) - p^2}{\sqrt{p^2 + x^2}}\,dx &= -\int \frac{p^2 + x^2}{\sqrt{p^2 + x^2}}\,dx + p^2 \int \frac{dx}{\sqrt{p^2 + x^2}} \\ &= -\int \sqrt{p^2 + x^2}\,dx + p^2 \int \frac{dx}{\sqrt{p^2 + x^2}}; \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\int \sqrt{p^2 + x^2}\,dx = x\sqrt{p^2 + x^2} - \int \sqrt{p^2 + x^2}\,dx + p^2 \int \frac{dx}{\sqrt{p^2 + x^2}} + \text{const.}$$

Transposons le troisième terme dans le premier membre, pour le réduire avec celui qui s'y trouve déjà, et rappelons-nous que l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{p^2+x^2}}$, de la forme $\int \frac{dr}{\sqrt{A+x^2}}$, a été obtenue (p. 50). En divisant par 2 et intégrant enfin à partir de la limite zéro, il viendra

$$\left\{\begin{aligned} \int_0^x \sqrt{p^2+x^2}\,dx &= \frac{x\sqrt{p^2+x^2}}{2} + \frac{p^2}{2}\left[\log\left(x+\sqrt{p^2+x^2}\right) - \log p\right] \\ &= \frac{x\sqrt{p^2+x^2}}{2} + \frac{p^2}{2}\log\frac{x+\sqrt{p^2+x^2}}{p}. \end{aligned}\right.$$

Cette valeur, substituée dans la formule (23), donnera donc, pour l'expression cherchée d'un arc de parabole,

$$(24)\qquad \left\{\begin{aligned} s &= \frac{x\sqrt{p^2+x^2}}{2p} + \frac{p}{2}\log\frac{x+\sqrt{p^2+x^2}}{p} \\ &= \frac{p}{2}\left[\frac{x}{p}\sqrt{1+\frac{x^2}{p^2}} + \log\left(\frac{x}{p}+\sqrt{1+\frac{x^2}{p^2}}\right)\right]. \end{aligned}\right.$$

On voit que la parabole ordinaire n'est rectifiable sous forme finie que par l'emploi de la fonction logarithmique, et non algébriquement.

288. — Rectification de l'ellipse.

Soit actuellement à évaluer, dans une ellipse rapportée à son grand axe $2a$ et à son petit axe $2b$ pour axes respectifs des abscisses x et des ordonnées y, un arc s inférieur à un quart du périmètre total, et compté à partir d'une extrémité du petit axe, jusqu'à un point dont on donne, entre $-a$ et a, l'abscisse x. De l'équation de la courbe $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, différentiée, il résultera $y'=-\frac{b^2x}{a^2y}$ et, par suite, $\sqrt{1+y'^2}$ ou $\frac{ds}{dx}=\sqrt{\frac{a^4y^2+b^4x^2}{a^4y^2}}$. Substituons à a^2y^2, sous le radical, la valeur $b^2(a^2-x^2)$ tirée de l'équation de la courbe, ce qui, après suppression de b^2 *haut* et *bas*, donne $\frac{ds}{dx}=\sqrt{\frac{a^4-(a^2-b^2)x^2}{a^2(a^2-x^2)}}$; et rappelons-nous que $\sqrt{a^2-b^2}$ exprime la demi-distance focale c, produit du demi grand axe a par l'*excentricité* e de l'ellipse. On peut donc remplacer a^2-b^2 par a^2e^2; et la valeur du rapport $\frac{ds}{dx}$ est enfin, après la suppression, haut et bas, du facteur commun a^2, $\sqrt{\frac{a^2-e^2x^2}{a^2-x^2}}$. Donc, chaque élément ds de l'arc égale le produit de cette dernière

expression, prise pour l'abscisse x d'un point de l'élément, par la projection dx de celui-ci sur l'axe des abscisses; et, l'arc commençant d'ailleurs pour $x = 0$, il vient

$$(25)\qquad s = \int_0^x \sqrt{\frac{a^2 - e^2x^2}{a^2 - x^2}}\, dx.$$

Introduisons à la place de x, comme dans la question analogue sur la surface de l'ellipse (p. 97), l'angle u, variable de zéro à $\pm\frac{\pi}{2}$, dont le sinus égale le rapport $\frac{x}{a}$; ou posons, en d'autres termes, $x = a\sin u$ et, par suite, $dx = a\cos u\, du$. Le second membre de (25) aura encore, sous le radical, un facteur commun a^2 qui disparaîtra des deux termes de la fraction; et, en observant de plus que le quotient de $\cos u$ par $\sqrt{1 - \sin^2 u}$ est l'unité, il viendra

$$(26)\qquad s = a\int_0^{\arcsin\frac{x}{a}} \sqrt{1 - e^2\sin^2 u}\, du.$$

On reconnaît, au deuxième membre, l'intégrale elliptique de seconde espèce $E(k, \varphi)$, dont le développement en série a été étudié dans la dernière Leçon (p. 83), et où il faudra poser ici $k = e$, $\varphi = \arc\sin\frac{x}{a}$.

Donc l'expression de l'arc d'ellipse est, au moyen de cette fonction transcendante $E(k, \varphi)$,

$$(27)\qquad s = aE\left(e, \arcsin\frac{x}{a}\right).$$

Évaluons, par exemple, le périmètre entier, que nous appellerons S, de l'ellipse, c'est-à-dire quatre fois ce que devient le second membre de (27) quand la projection x de l'arc s sur le grand axe atteint son maximum a, ou quand l'arc u devient $\frac{\pi}{2}$. Alors le second membre de (27) acquiert la valeur $aE\left(e, \frac{\pi}{2}\right)$, produit du demi grand axe a par l'intégrale complète $E^1(e)$; et, si l'on substitue, dans $S = 4aE^1(e)$, la valeur en série que donne la seconde formule (26) de la dernière Leçon (p. 85), on aura

$$(28)\quad S = 2\pi a\left[1 - \frac{1}{1}\left(\frac{1}{2}e\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\frac{3}{4}e^2\right)^2 - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}e^3\right)^2 - \dots\right].$$

Le contour de l'ellipse vaut donc le produit de la circonférence cir-

conscrite $2\pi a$ par la série $1 - \frac{1}{1}\left(\frac{1}{2}e\right)^2 - \ldots$, essentiellement inférieure à l'unité. Il devait bien en être ainsi, puisque l'ellipse, ligne convexe enveloppée par la circonférence $2\pi a$, se trouve nécessairement plus courte qu'elle.

Comme d'ailleurs, pour la même raison, ce périmètre S dépasse celui, $2\pi b$, du cercle inscrit, la question se pose de savoir s'il ne serait pas, jusqu'à un certain degré d'approximation, la moyenne soit arithmétique, soit géométrique, des deux circonférences circonscrite et inscrite $2\pi a$, $2\pi b$; question d'autant plus naturelle, que l'aire de l'ellipse est déjà exactement la moyenne géométrique des surfaces contenues dans les deux circonférences. Il y a donc lieu, d'après l'égalité $a^2 - b^2 = a^2e^2$ qui donne $b = a\sqrt{1-e^2}$, d'évaluer en série l'expression $2\pi a\sqrt{1-e^2}$ de la circonférence inscrite, en y développant le radical par la seconde formule (28) [T. I, p. 159]. Il vient

$$2\pi b = 2\pi a\left[1 - \frac{1}{1}\left(\frac{1}{2}e^2\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}e^4\right) - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\,\frac{5}{6}e^6\right) - \ldots\right];$$

d'où, pour la moyenne arithmétique de cette expression et de $2\pi a$,

$$(29)\qquad \left\{\begin{aligned} \pi(a+b) = 2\pi a\Big[1 - \frac{1}{1}\left(\frac{1}{2}e\right)^2 &- \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^2}\,\frac{3}{4}e^4\right)\\ &- \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2^2}\,\frac{3}{4}\,\frac{5}{6}e^6\right) - \ldots\Big], \end{aligned}\right.$$

série dont tous les termes entre crochets, sauf les deux premiers, sont, à la fois, négatifs et d'une valeur absolue visiblement plus forte que celle des termes analogues de (28).

Ainsi, le contour de l'ellipse dépasse la moyenne arithmétique des deux circonférences inscrite et circonscrite, et, à plus forte raison, leur moyenne géométrique [1], $2\pi\sqrt{ab}$ ou $2\pi a(1-e^2)^{\frac{1}{4}}$, qui serait, en développant $(1-e^2)^{\frac{1}{4}}$ par la formule du binôme,

$$(30)\qquad 2\pi\sqrt{ab} = 2\pi a\left(1 - \frac{e^2}{4} - \frac{3e^4}{32} - \frac{7e^6}{128} - \frac{77e^8}{2048} - \ldots\right).$$

---

(1) La moyenne arithmétique de deux nombres positifs donnés x, y dépasse toujours leur moyenne géométrique, car son carré $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$ excède le carré, xy, de la moyenne géométrique, leur différence étant la quantité $\left(\frac{x-y}{2}\right)^2$, essentiellement positive. On peut voir d'ailleurs, sur ce sujet, le deuxième Fascicule, p. 50*.

Toutefois, si l'on suppose le carré e^2 de l'excentricité assez petit pour que sa quatrième puissance e^8 soit insensible à côté de l'unité, ou pour que les séries, dans (28), (29) et (30), puissent être réduites à leurs quatre premiers termes, ces formules donneront

$$(31)\qquad \left\{\begin{aligned} &S - \pi(a + b) = \frac{\pi a e^4}{32}\left(1 + \frac{3e^2}{4}\right),\\ &S - 2\pi\sqrt{ab} = 3\,\frac{\pi a e^4}{32}\left(1 + \frac{3e^2}{4}\right); \end{aligned}\right.$$

d'où l'on conclura

$$3[S - \pi(a + b)] = S - 2\pi\sqrt{ab} \ \text{(sensiblement)}$$

et, par suite,

$$(32)\qquad S = \pi\left[3\,\frac{a + b}{2} - \sqrt{ab}\right] \ \text{(à fort peu près)}.$$

Si même on pouvait négliger une erreur absolue par défaut égale à $\frac{\pi a e^4}{32}\left(1 + \frac{3e^2}{4}\right)$, ou (vu que S ne diffère pas beaucoup de $2\pi a$) une erreur relative valant à peu près le quotient de $\frac{\pi a e^4}{32}$ par $2\pi a$, c'est-à-dire la soixante-quatrième partie de la quatrième puissance de l'excentricité, le contour de l'ellipse serait sensiblement, d'après la première formule (31), la moyenne arithmétique des deux circonférences circonscrite et inscrite.

Mais, en s'en tenant à la formule (32) beaucoup plus approchée, quoique encore fort simple, l'erreur (par excès) ne deviendra sensible que dans le cas d'ellipses très excentriques : car, même pour $e = \sin 75^\circ = 0,9659$ ou pour $\frac{b}{a} = \cos 75^\circ = 0,2588$, elle n'atteint pas la cent-cinquantième partie du résultat, comme on le reconnaît par comparaison avec la valeur exacte $4aE^1(e) = 4aE^1(\sin 75^\circ)$ calculée au moyen du Tableau de la page 86 ; et, pour $e = \sin 70^\circ = 0,9397$ ou pour $\frac{b}{a} = 0,3420$, elle n'est que les 0,003 de S. Pour $e = \sin 80^\circ = 0,9848$ $\left(\text{ou } \frac{b}{a} = 0,1736\right)$, l'erreur s'élève au soixante-huitième environ de S et commence, on le voit, à n'être plus négligeable dans des applications ordinaires. Quand l'excentricité e est petite, on s'y rend compte de l'approximation, en évaluant, jusqu'aux termes affectés de e^8 inclusivement, le second membre de (32), qui n'est autre chose que le demi-excédent de trois fois le second membre de (29) sur le

second membre de (30). On ne trouve ainsi, pour le premier terme de la différence entre ce résultat approché (32) et la vraie valeur (28) de S, que le produit de $2\pi a$ par le très petit rapport positif $\frac{3e^8}{2^{14}} = \frac{3e^8}{16384}$, toujours inférieur à un cinq-millième.

En résumé, la formule (32) suffira généralement *dans la pratique*, et elle permettra d'y regarder le contour de toute ellipse dont l'excentricité n'est pas très forte (ou ne dépasse pas, par exemple, 0,95), comme équivalent à celui d'un cercle *ayant pour diamètre l'excédent de trois fois la moyenne arithmétique des deux demi-axes sur une fois leur moyenne géométrique.*

289*. — Courbe plane dont les arcs sont proportionnels aux surfaces qu'ils limitent au-dessus de l'axe des abscisses; rectification de la chaînette.

(Compléments, p. 63*.)

290*. — Rectification d'une courbe rapportée à des coordonnées polaires; application à la spirale logarithmique et à la loxodromie.

(Compléments, p. 65*.)

VINGT-SEPTIÈME LEÇON.

CUBATURE DES VOLUMES ET QUADRATURE DES SURFACES COURBES.

291. — Cubature des volumes : formule générale.

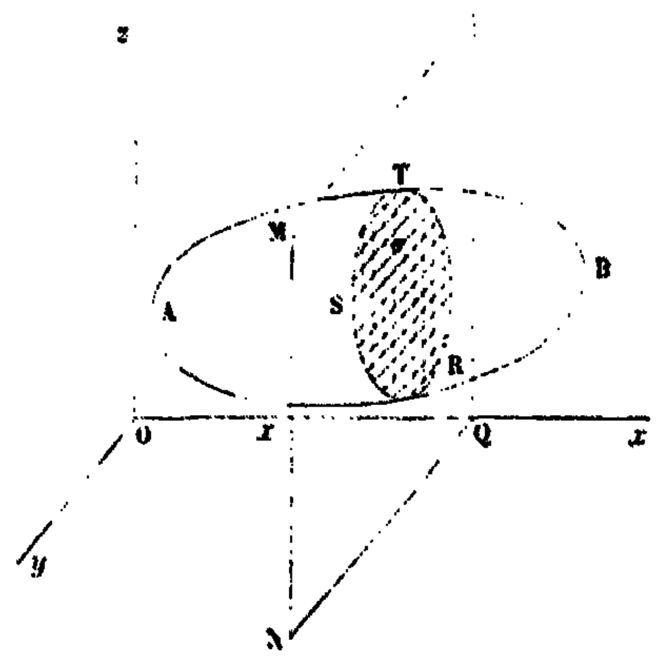
Passons maintenant à une troisième application géométrique des intégrales définies, à la *cubature* des volumes, c'est-à-dire à l'évaluation de l'étendue (ou *volume*) de la portion de l'espace qu'occupe un corps de forme et de dimensions données, comparée à l'étendue analogue d'un cube ayant pour arête l'unité de longueur [1].

---

[1] *Note sur la notion de volume.*

Les auteurs de Calcul intégral ne me paraissent pas avoir, jusqu'ici, d'une manière suffisamment nette, défini la quantité dite *volume* d'un corps et, surtout,

Fig. 49.



montré comment cette quantité est indépendante de l'orientation des plans suivant lesquels se fait la division de l'espace en cubes élémentaires. Il y aura lieu de procéder, à cet égard, comme nous l'avons fait, dans la note du n° 276 (p. 91), pour l'aire d'une surface plane.

On divisera le solide donné ARSTB, par trois familles de plans normaux à des axes coordonnés rectangles Ox, Oy, Oz, en cubes infiniment petits; et l'on se

Soit ARSTB (p. 116) un corps quelconque, rapporté à un système d'axes rectilignes Ox, Oy, Oz, dont le premier, Ox, fait avec le plan yOz des deux autres un angle connu φ, complémentaire de celui,

---

proposera d'évaluer le rapport du nombre de ces cubes au nombre des cubes pareils contenus dans le cube fini qui a son arête égale à l'unité. Chaque petit cube de longueur dx comptera donc, dans le rapport cherché, pour la valeur dx^3, vu que le cube dont l'arête vaut 1 a ses dimensions $\frac{1}{dx}$ fois plus grandes et contient par suite, comme on sait, un nombre de petits cubes exprimé par $\left(\frac{1}{dx}\right)^3 = \frac{1}{dx^3}$. Deux plans consécutifs quelconques perpendiculaires à Ox, tels que le plan MNQ, dont l'abscisse OQ égale x, et celui d'abscisse $x + dx$, comprendront entre eux, à l'intérieur du corps proposé, sensiblement autant de cubes, d'arête dx, qu'il y aura de carrés dx^2 découpés, par les plans normaux aux y et aux z, dans la section RST suivant laquelle le plan MNQ intersecte le solide. Le nombre de ces petits cubes égalera donc, sauf erreur relative négligeable, le quotient de l'aire σ de la section RST par l'aire dx^2 de l'un des carrés; et leur valeur totale, produit de dx^3 par leur nombre $\frac{\sigma}{dx^2}$, sera σdx. Or il est clair que cette section faite dans le solide donné par le plan MNQ se trouve parfaitement déterminée dès que l'on connaît l'abscisse $OQ = x$ du plan, en sorte que son aire σ égale une certaine fonction, $f(x)$, de x. Ainsi, les cubes élémentaires contenus entre les deux plans consécutifs qui ont les abscisses x, $x + dx$, entreront dans la somme à évaluer pour la part $f(x)dx$; et il est clair que, si x_0, x_1 désignent la valeur la plus petite et la valeur la plus grande reçues par l'abscisse x dans tout le corps, l'expression totale indiquant le rapport du nombre des cubes infiniment petits qu'il comprend, au nombre des cubes pareils contenus dans le cube d'arête 1, sera l'intégrale définie

$$\int_{x_0}^{x_1} \sigma dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx.$$

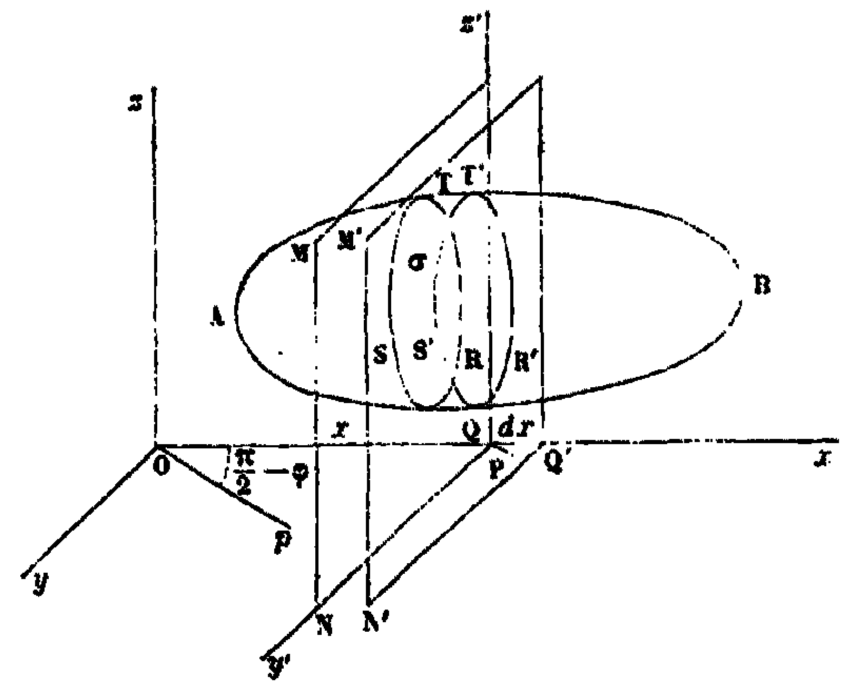
Ce rapport est donc une quantité parfaitement déterminée : on l'appelle le *volume* du corps.

On verra, en procédant comme dans la note citée (p. 93), que le rapport limite ainsi défini s'obtiendrait également par la décomposition du solide donné en parties quelconques, lesquelles s'évalueraient chacune isolément, et dont il suffirait d'ajouter ensuite les valeurs. Enfin, après avoir démontré que des solides égaux, pareillement orientés, ou même leurs symétriques par rapport aux plans coordonnés, s'équivalent, comme ayant leurs volumes exprimés par des intégrales dont les éléments σdx sont en même nombre et respectivement égaux chacun à chacun, on reconnaîtra qu'un déplacement quelconque, imprimé à un corps donné et à une sphère liée à ce corps, ne fait pas varier le rapport de leurs volumes, vu que des assemblages de petits cubes égaux, les remplissant autant que possible et entraînés dans leur mouvement, resteront tous pareillement disposés et toujours en même nombre. D'ailleurs, comme aucun changement d'orientation ne modifie la manière d'être de la sphère par rapport aux plans coordonnés, ni, par suite, l'intégrale appelée son volume, l'intégrale analogue dite *volume du corps proposé* restera, elle aussi, invariable, et sera la même non seulement pour des corps égaux quelconques, mais encore pour leurs symétriques.

xOp, qu'il fait avec une perpendiculaire Op à Oy et Oz. Proposons-nous d'exprimer le volume de ce corps, au moyen d'une intégrale dépendant de quantités explicitement calculables dès qu'on aura défini la situation, par rapport aux axes, de la surface ASB qui le limite, c'est-à-dire dès que l'on connaîtra l'équation des diverses parties de ASB.

A cet effet, de même que nous avons évalué les surfaces planes par une division en bandes étroites ayant la direction des ordonnées, menons ici, par les divers points de l'axe des x, des plans, parallèles à celui des yz, qui partageront le volume en tranches d'une épaisseur infiniment petite. Soit RSTT'S'R' l'une de ces tranches, comprise entre le plan MNQ, qui a l'abscisse $OQ = x$, et le plan suivant M'N'Q',

Fig. 50.



dont l'abscisse OQ' est $x + dx$. Appelons σ l'aire de la première base RST de cette tranche, c'est-à-dire l'aire de la section faite dans le corps par le plan MNQ. Il est évident que si une droite, constamment égale et parallèle à QQ', se mouvait entre les deux plans MNQ, M'N'Q', de manière à suivre le contour de la section σ, cette droite mobile décrirait un cylindre entourant un volume presque identique à celui de la tranche RSTT'S'R'; car il ne s'en distinguerait que le long du bord sur une profondeur comparable à $QQ' = dx$, ou, pour ainsi dire, par de simples rognures, insignifiantes en comparaison de la tranche totale. Donc on pourra prendre comme expression de celle-ci le volume du cylindre, produit de la base σ par sa distance au plan M'N'Q' de l'autre base, c'est-à-dire par la perpendiculaire QP au plan M'N'Q', projection de $QQ' = dx$ sous l'angle $Q'QP = xOp = \frac{\pi}{2} - \varphi$. Ainsi

la tranche a pour valeur

$$\sigma \times \mathrm{QP} = \sigma dx \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = (\sin\varphi)\sigma dx.$$

Mais observons que, vu les données dont on dispose dans chaque cas et qui expriment la configuration du corps, la section σ déterminée par le plan MNQ se trouve définie dès que l'on connaît l'abscisse $\mathrm{OQ} = x$ de ce plan. Par exemple, si l'équation de la surface limite du corps ASB est $F(x, y, z) = 0$, le contour RST de σ sera représenté au moyen de cette même équation dans laquelle, seulement, on fera x égal à la valeur constante OQ, et où les seules variables seront les coordonnées y, z, d'ailleurs faciles à construire, sur le plan même de la section, par rapport aux deux axes $\mathrm{Q}y'$, $\mathrm{Q}z'$ parallèles à $\mathrm{O}y$ et à $\mathrm{O}z$. Donc, une quadrature effectuée dans le plan $y'\mathrm{Q}z'$ et revenant, pour toutes les sections analogues σ, à les diviser en bandes minces de largeur dy par un même système de plans $y =$ const. parallèles aux zx, permettra de calculer l'aire σ, qui, généralement variable d'une section à l'autre ou avec l'abcisse x, sera une certaine fonction, désormais connue, de x. Nous l'appellerons $f(x)$ et poserons ainsi

$$\sigma = f(x).$$

Alors l'expression de la tranche quelconque RSTT'S'R' devient $(\sin\varphi)f(x)dx$; et le volume total demandé est la somme d'une infinité de tranches pareilles, c'est-à-dire la somme de toutes les valeurs que prend le produit $(\sin\varphi)f(x)dx$ quand x y croît, avec continuité, depuis la plus petite abscisse, que j'appellerai x_0, des diverses régions du corps jusqu'à la plus grande, que j'appellerai x_1. Les deux points A et B ayant respectivement cette plus petite et cette plus grande abscisse seront en général ceux de contact de la surface limite ASB avec deux plans tangents menés parallèlement aux yz. On aura donc, pour la formule cherchée,

$$\text{(1)} \qquad \text{Volume} = (\sin\varphi)\int_{x_0}^{x_1} \sigma dx = (\sin\varphi)\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx.$$

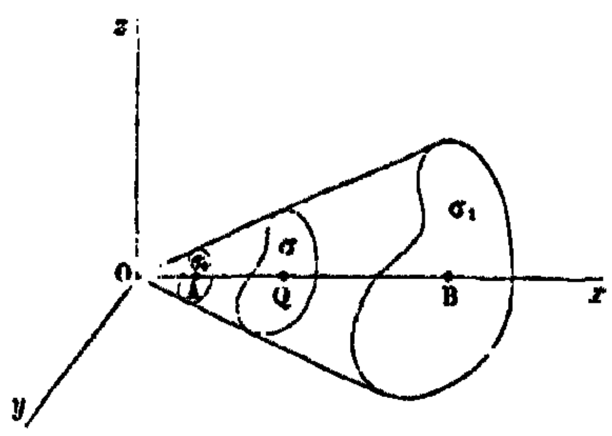
En résumé, le calcul d'un volume exigera deux intégrations, l'une, pour évaluer la section σ mesurant l'étendue du corps dans les régions de l'espace qui ont une abscisse donnée x, étendue proportionnelle au volume partiel, d'épaisseur $dx \sin\varphi$, étalé en quelque sorte sur cette section, l'autre, pour sommer ensuite tous les volumes partiels analogues.

292. — Premier exemple : tronc de cône ou de pyramide.

Prenons comme premier exemple le tronc de cône ou de pyramide à bases quelconques, afin de montrer avec quelle facilité le Calcul intégral atteint des résultats qui avaient demandé à la Géométrie élémentaire d'assez longs raisonnements.

Rapportons le cône donné à un système d'axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, en choisissant pour origine le sommet O et pour axe des x la perpendiculaire OB menée du sommet O sur le plan de la grande base, σ_1, du tronc de cône, perpendiculaire qui coupe, en A, le plan

Fig. 51.



de la petite base σ_0. Ces bases σ_0, σ_1 sont évidemment les deux sections σ, parallèles aux yz, qui ont la plus petite abscisse, $OA = x_0$, et la plus grande $OB = x_1$. Enfin, la hauteur $AB = h$ du tronc est la différence $OB - OA$ des deux abscisses extrêmes.

Ce qui caractérise les sections σ d'un cône ou d'une pyramide, c'est qu'elles sont toutes semblables et proportionnelles au carré de leurs distances $OQ = x$ au sommet. En d'autres termes, le rapport $\frac{\sigma}{x^2}$ est ici constant, et l'on a, en appelant a sa valeur,

$$\sigma = ax^2. \tag{2}$$

L'application de cette propriété revient évidemment à effectuer, de la première intégration qui doit donner σ, toute la partie concernant la forme du résultat, et nous pourrons nous dispenser de compléter l'intégration dont il s'agit; car cela ne serait nécessaire que pour évaluer le coefficient numérique a convenant à chaque espèce de section. Ainsi, portons la valeur (2) de σ dans (1), où il faudra faire $\varphi = \frac{\pi}{2}$ puisque Ox est normal au plan des yz. Il viendra, par une intégration

immédiate,

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \text{Volume} &= \int_{x_0}^{x_1} a x^2 dx = \frac{a}{3}(x^3)_{x_0}^{x_1} = \frac{a}{3}(x_1^3 - x_0^3) \\ &= \frac{a}{3}(x_1 - x_0)(x_1^2 + x_1 x_0 + x_0^2) = \frac{h}{3}(a x_1^2 + a x_1 x_0 + a x_0^2). \end{aligned}\right.$$

Or l'équation (2), si l'on y prend successivement $x = x_1$, $x = x_0$, donne $a x_1^2 = \sigma_1$, $a x_0^2 = \sigma_0$; d'où $a x_1 x_0 = \sqrt{(a x_1^2)(a x_0^2)} = \sqrt{\sigma_1 \sigma_0}$. Donc la relation (3) devient la formule classique du volume d'un tronc de cône ou de pyramide,

$$(4)\qquad \text{Volume} = \frac{h}{3}\left(\sigma_1 + \sqrt{\sigma_1 \sigma_0} + \sigma_0\right).$$

Cette formule comprend celle de la pyramide, qui s'en déduit par l'hypothèse $\sigma_0 = 0$, et aussi celle du cylindre ou du prisme, qu'on obtient en supposant le sommet O éloigné à l'infini et en faisant par suite $\sigma_0 = \sigma_1 = \sigma = \sqrt{\sigma_1 \sigma_0}$.

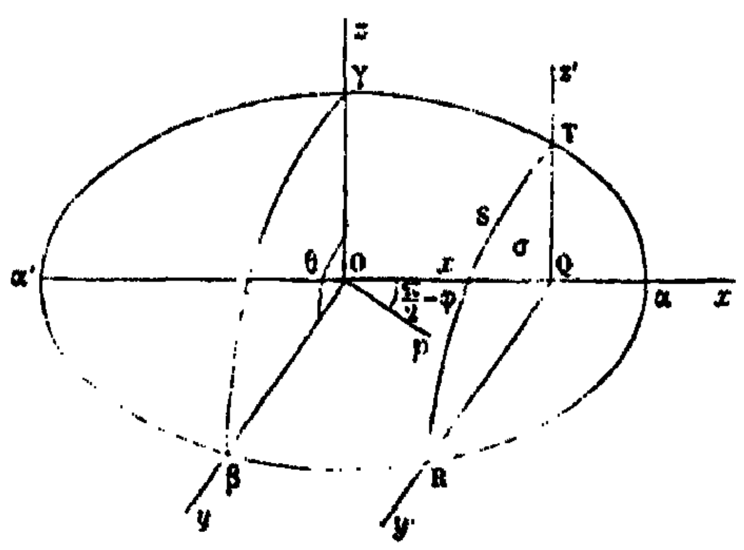
293. — Deuxième exemple : volume de l'ellipsoïde et des parallélépipèdes, à faces conjuguées, qu'on lui circonscrit.

Proposons-nous actuellement d'évaluer le volume de l'ellipsoïde dont l'équation, par rapport à un système donné de diamètres conjugués Ox, Oy, Oz, est

$$(5)\qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

a, b, c désignant les trois demi-diamètres $O\alpha = a$, $O\beta = b$, $O\gamma = c$

Fig. 52.



dirigés suivant les axes coordonnés positifs. Appelons θ l'angle yOz,

des deux derniers $O\beta$, $O\gamma$, et soit toujours φ celui qui exprime l'inclinaison de $O\alpha$ ou Ox sur le plan des yz.

Ici, la section σ faite, dans le corps, par le plan $y'Qz'$ parallèle aux yz et dont l'abscisse est x, aura pour équation, d'après (5),

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2} \quad \text{ou} \quad \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2}+\frac{z^2}{\left(c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2}=1.$$

On voit que cette section, dont RSTQ représente la partie comprise dans l'angle des coordonnées positives, est une ellipse rapportée aux demi-diamètres conjugués $QR=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$, $QT=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ faisant entre eux l'angle θ. La formule (3) de la dernière Leçon (p. 97) donnera donc, pour son aire, $\sigma=\pi\times QR\times QT\times \sin RQT$, c'est-à-dire

$$(6) \qquad \sigma=(\pi bc\sin\theta)\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).$$

Portons cette valeur dans (1) [p. 117] et observons que, vu l'équation (5), les deux limites x_0 et x_1 entre lesquelles varie l'abscisse x sont $-a$ et $+a$. Il viendra, grâce à une intégration immédiate,

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \text{Volume} &= (\pi bc\sin\theta\sin\varphi)\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx \\ &= (\pi bc\sin\theta\sin\varphi)\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)_{-a}^{a}=(\pi bc\sin\theta\sin\varphi)\left(\frac{4}{3}a\right). \end{aligned} \right.$$

Ainsi la formule du volume de l'ellipsoïde est

$$(8) \quad \text{Vol. de l'ellipsoïde}=\frac{4}{3}\pi abc\sin\theta\sin\varphi=\frac{\pi}{6}(2a)(2b)(2c)\sin\theta\sin\varphi.$$

Or le produit $(2a)(2b)(2c)\sin\theta\sin\varphi$ représente le volume qu'on aurait obtenu si, de $x=-a$ à $x=+a$, la section avait été un parallélogramme $(2b)(2c)\sin\theta$ ayant son centre sur le diamètre $x'x$ et ses côtés respectivement égaux et parallèles aux deux autres diamètres conjugués $2b$, $2c$, dirigés suivant Oy et Oz. En d'autres termes, ce produit exprime le volume du parallélépipède, circonscrit à l'ellipsoïde, dont les faces seraient les plans tangents parallèles aux trois plans diamétraux conjugués choisis pour plans coordonnés, et dont, par suite, les arêtes se trouveraient égales et parallèles aux diamètres conjugués suivant lesquels ces plans se coupent. La formule (8) revient donc à dire que l'ellipsoïde est la fraction $\frac{\pi}{6}$ de tous ces parallélépipèdes, ou

que *tous les parallélépipèdes circonscrits à un ellipsoïde, et ayant leurs faces parallèles à un système de plans diamétraux conjugués, ont le même volume, égal au produit du volume de l'ellipsoïde par le facteur* $\frac{6}{\pi}$.

Supposons maintenant qu'on rapporte l'ellipsoïde, non pas à un système quelconque de diamètres conjugués, mais à celui qui est constitué par ses axes, ou pour lequel les angles θ, φ sont droits. Si l'on appelle A, B, C les valeurs que reçoivent alors a, b, c, c'est-à-dire les trois demi-axes de l'ellipsoïde, la formule (8) deviendra

$$\text{(9)} \qquad \text{Volume de l'ellipsoïde} = \frac{4}{3}\pi ABC.$$

Elle se réduirait à $\frac{4}{3}\pi A^3$, ou à $\frac{4}{3}\pi B^3$, ou à $\frac{4}{3}\pi C^3$, si deux des axes étaient égaux au troisième, cas où l'équation (5) de l'ellipsoïde serait celle d'une sphère de rayon A, ou B, ou C. La formule (9) donne donc bien, comme cas particulier, le volume classique de la sphère, obtenu pourtant, dans les éléments de Géométrie, d'une manière tout autre, savoir, par décomposition en pyramides élémentaires ayant leur sommet au centre, ou en secteurs engendrés par la rotation de triangles infiniment aigus se réunissant de même au centre. Enfin, observons que $\frac{4}{3}\pi ABC$ égale la racine cubique du produit des trois quantités $\frac{4}{3}\pi A^3$, $\frac{4}{3}\pi B^3$, $\frac{4}{3}\pi C^3$, ou constitue ce qu'on appelle leur *moyenne géométrique,* et nous pourrons énoncer la proposition suivante, analogue à celle qui concerne l'aire de l'ellipse (p. 98) : *Le volume d'un ellipsoïde est la moyenne géométrique des volumes de trois sphères dont les diamètres seraient les axes respectifs de cet ellipsoïde.*

294. — Troisième exemple : volumes d'un segment d'ellipsoïde et d'un segment de paraboloïde elliptique.

Nous choisirons pour troisième exemple le volume d'un *segment* d'ellipsoïde, en appelant ainsi la portion d'un ellipsoïde contenue entre deux plans sécants parallèles; ce qui comprendra comme cas particulier le segment de la sphère. Les deux sections déterminées par les plans sécants seront dites les *bases* du segment, et leur distance perpendiculaire en sera la *hauteur*.

Si nous adoptons pour axe des x le diamètre qui, dans l'ellipsoïde, est conjugué aux deux bases et, pour axes des y et des z, deux dia-

mètres conjugués de la section diamétrale parallèle à ces bases, l'équation de l'ellipsoïde prendra évidemment la forme (5) ci-dessus; de plus, les deux bases du segment ne seront pas autre chose que deux des sections σ, parallèles aux yz, dont la relation (6) exprime l'aire. Nous appellerons x_0, x_1 leurs abscisses respectives, et σ_0, σ_1 leurs surfaces, qui auront pour valeurs, d'après (6),

$$\sigma_0 = (\pi bc \sin\theta)\left(1 - \frac{x_0^2}{a^2}\right), \qquad \sigma_1 = (\pi bc \sin\theta)\left(1 - \frac{x_1^2}{a^2}\right). \tag{10}$$

D'ailleurs, la distance de ces deux bases, mesurée parallèlement à l'axe des x, égalera évidemment la différence $x_1 - x_0$ de leurs abscisses, et sa projection, $(x_1 - x_0)\sin\varphi$, sur une perpendiculaire Op (p. 119) commune aux deux bases, sera la hauteur h du segment.

Nous aurons donc à effectuer la même intégration que pour l'ellipsoïde, mais seulement entre les limites x_0, x_1, au lieu de $-a$ et $+a$. Il viendra, au lieu de (7),

$$\left\{\begin{aligned} \text{Vol. du segment} &= (\pi bc \sin\theta \sin\varphi)\left[(x_1 - x_0) - \frac{x_1^3 - x_0^3}{3a^2}\right] \\ &= (\pi bc \sin\theta \sin\varphi)(x_1 - x_0)\left(1 - \frac{x_1^2 + x_1 x_0 + x_0^2}{3a^2}\right). \end{aligned}\right.$$

Remplaçons, dans la dernière parenthèse, le terme $-\dfrac{x_1 x_0}{3a^2}$ par la différence de carrés, évidemment égale, $\dfrac{(x_1 - x_0)^2}{6a^2} - \dfrac{x_1^2 + x_0^2}{6a^2}$; ce qui, grâce à quelques réductions évidentes, donnera

$$1 - \frac{x_1^2 + x_1 x_0 + x_0^2}{3a^2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x_1^2}{a^2}\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x_0^2}{a^2}\right) + \frac{1}{6}\,\frac{(x_1 - x_0)^2}{a^2}.$$

Alors l'expression du volume, en y remplaçant les binômes $1 - \dfrac{x_0^2}{a^2}$ et $1 - \dfrac{x_1^2}{a^2}$ par leurs valeurs tirées de (10) et, au besoin, $(x_1 - x_0)\sin\varphi$ par h, deviendra

$$\left\{\begin{aligned} &\text{Vol. du segment} \\ &\quad = \frac{\sigma_1 + \sigma_0}{2} h + \frac{\pi}{6}(x_1 - x_0)\left(2b\,\frac{x_1 - x_0}{2a}\right)\left(2c\,\frac{x_1 - x_0}{2a}\right)\sin\theta \sin\varphi. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

Le premier terme, $\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_0)h$, du second membre, représente le volume d'un cylindre qui aurait pour hauteur la hauteur h du segment et pour base la moyenne arithmétique de ses deux bases σ_1, σ_0. Quant

au terme suivant, si on le compare à la dernière expression (8) du volume d'un ellipsoïde entier, et si l'on observe que, des trois facteurs $x_1 - x_0$, $2b\frac{x_1-x_0}{2a}$, $2c\frac{x_1-x_0}{2a}$, proportionnels à $2a$, $2b$, $2c$, le premier est la portion de l'axe des x comprise entre les deux bases du segment, on verra qu'il exprime le volume d'un ellipsoïde dont trois diamètres conjugués seraient parallèles à Ox, Oy, Oz et exprimés par ces trois facteurs, ellipsoïde évidemment semblable au proposé et semblablement placé, mais que l'on peut supposer inscrit entre les deux bases σ_0, σ_1. Donc, *un segment d'ellipsoïde égale, en volume, la somme d'un cylindre ayant sa base moyenne arithmétique des deux bases du segment, avec même hauteur que ce dernier, et d'un ellipsoïde semblable à celui dont le segment fait partie et semblablement disposé, inscrit entre les deux bases du segment.*

Quand l'ellipsoïde devient une sphère, cette proposition se réduit bien à celle que l'on démontre pour le segment sphérique dans les éléments de Géométrie.

Mais considérons l'autre cas extrême où l'ellipsoïde, au contraire, s'allonge indéfiniment dans le sens de l'un de ses diamètres, $2a$ par exemple, tandis que les rapports $\frac{b^2}{a}$, $\frac{c^2}{a}$ conservent deux valeurs finies, p, q, choisies à volonté. On sait qu'alors, dans le voisinage de chacune des extrémités du diamètre $2a$, et jusqu'à toute distance finie de cette extrémité, l'ellipsoïde dégénère en un paraboloïde elliptique quelconque. D'ailleurs, à la limite $a = \infty$, les rapports $\frac{b^2}{a^2}$, $\frac{c^2}{a^2}$, ou $\frac{p}{a}$, $\frac{q}{a}$, sont nuls, et b, c deviennent infiniment petits par rapport à a; de sorte que l'ellipsoïde semblable inscrit entre les deux bases d'un segment de hauteur finie s'aplatit et s'amincit jusqu'à zéro. Donc le dernier terme de la formule (11) s'évanouit à la limite, et cette formule exprime alors que *le volume d'un segment quelconque de paraboloïde elliptique égale le produit de la demi-somme de ses deux bases par leur distance.*

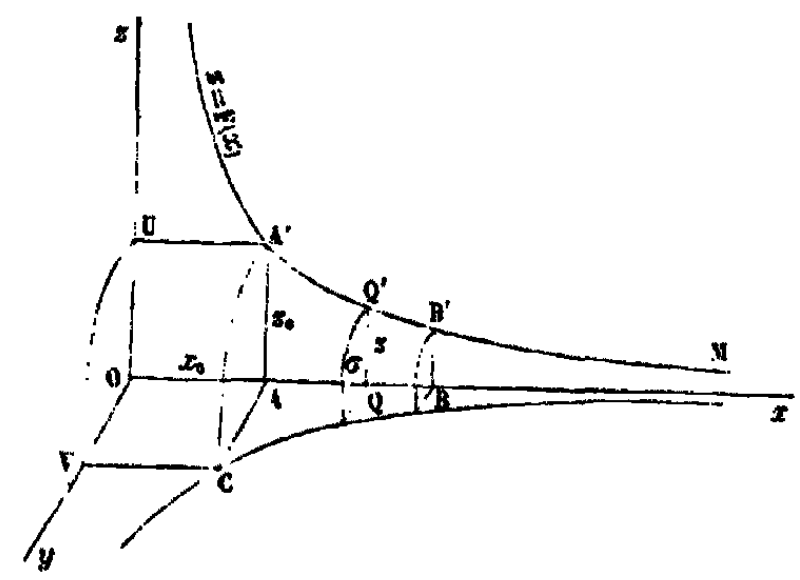
Une des bases s'annule quand son plan devient tangent au paraboloïde, cas où la distance de ce plan tangent, à l'autre base restée finie, est la hauteur du segment, c'est-à-dire sa plus grande ordonnée abaissée normalement sur le plan qui le limite. Par conséquent, *le volume détaché d'un paraboloïde elliptique par tout plan qui le coupe est égal au produit de sa base par la moitié de sa hauteur.*

On remarquera l'analogie de cet énoncé avec celui, presque aussi simple, qui concerne l'aire d'un segment parabolique (p. 100).

293. — Quatrième exemple : volume d'un solide de révolution.

Considérons enfin le solide, dit *de révolution*, que décrit la surface A'B'BA limitée, dans un plan zOx, par une courbe quelconque A'Q'B', l'axe des x, et deux ordonnées perpendiculaires A'A, B'B,

Fig. 53.



lorsqu'on fait tourner cette surface autour de la droite même AB choisie comme axe des x.

Nous appellerons toujours x_0, x_1 les deux abscisses OA, OB la plus petite et la plus grande des points du solide considéré; et nous observerons que, si l'on suppose rectangulaires les trois axes Ox, Oy, Oz, les sections σ faites dans le volume parallèlement aux yz ne seront autre chose que les cercles mêmes décrits, lors du mouvement de rotation, par les diverses ordonnées z, comme QQ', de la courbe génératrice A'B'. Soit donc $z = F(x)$ l'équation de cette courbe, il viendra $\sigma = \pi z^2 = \pi F(x)^2$. Par suite, la formule (1) [p. 117], où il faudra poser en outre $\sin\varphi = 1$, sera ici

$$\text{(12)} \qquad \text{Volume} = \int_{x_0}^{x_1} \pi z^2\,dx = \pi \int_{x_0}^{x_1} F(x)^2\,dx.$$

Prenons comme exemple le volume qui est engendré par la surface AA'x comprise entre un arc A'M d'hyperbole équilatère prolongé à l'infini, son asymptote Ox et l'ordonnée A'A normale à celle-ci, lorsqu'on fait tourner cette surface autour de l'asymptote. Alors l'équation de la courbe a la forme $z = \dfrac{a}{x}$ et, la limite supérieure x_1 étant d'ailleurs infinie, il vient

$$\text{Volume} = \pi a^2 \int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \pi a^2 \left(\frac{-1}{x}\right)_{x_0}^{\infty} = \pi \frac{a^2}{x_0} = \pi \left(\frac{a}{x_0}\right)^2 x_0.$$

Or, d'après la formule générale, $\frac{a}{x}$, de l'ordonnée z, le quotient $\frac{a}{x_0}$ exprime l'ordonnée initiale z_0 ou AA′ de l'arc générateur. Le volume cherché égale donc $\pi z_0^2 x_0$, c'est-à-dire $\pi \times \overline{AA'}^2 \times OA$, ou, précisément, le volume du cylindre UA′CV, ayant même base que le volume proposé, et pour hauteur, la distance OA de cette base A′AC au plan engendré par la seconde asymptote Oz de la courbe génératrice. La figure ne représente de ce cylindre, tout comme des cercles engendrés par les ordonnées AA′, QQ′, BB′, que le quart compris dans l'angle des coordonnées positives.

On voit par là que *le volume dont il s'agit a une valeur finie et déterminée,* malgré sa longueur infinie Ax et, même, *malgré la valeur infinie de l'aire* AA′x qui le décrit. Ce paradoxe apparent, d'un volume *fini* engendré par une surface *infinie,* s'explique en observant que les parties de l'aire AA′M, très éloignées, auxquelles est due sa valeur infinie, ne décrivent autour de Ox, vu leur aplatissement contre cet axe, que des cercles infiniment petits. Donc la troisième dimension qui naît du mouvement s'y trouve infiniment réduite; et l'influence du facteur algébrique nul qu'elle introduit l'emporte sur celle du facteur infini exprimant l'aire génératrice, lequel n'est qu'un logarithme, d'un ordre d'infinitude évanouissant (t. I, p. 139).

296. — De la quadrature des surfaces courbes; ce que l'on entend par l'aire d'une telle surface.

Après avoir vu comment on peut cuber un corps, cherchons à évaluer sa surface limite. Celle-ci, généralement courbe, ne sera pas comparable d'une manière directe à l'unité d'aire, qui est plane; et il y aura lieu d'abord de s'en former une idée précise en procédant comme nous l'avons fait dès le commencement du Cours pour la notion de la longueur d'un arc (t. I, p. 14).

La partie quelconque de surface courbe dont on veut considérer l'aire étant bien définie par l'équation de cette surface et par une autre relation propre à fixer son contour, nous imaginerons que l'on construise une surface polyédrique à faces très petites, très voisines partout de la surface proposée et très peu inclinées par rapport aux plans tangents menés à celle-ci en des points voisins, cette surface polyédrique se terminant enfin très près du contour donné. Pour l'obtenir, on pourra, par exemple, comme lorsqu'il s'agissait de former des lignes polygonales tendant vers une courbe, l'inscrire à la surface proposée, c'est-à-dire prendre tous ses sommets sur celle-ci. La construction

réussira, quels que soient les points choisis comme sommets, pourvu qu'on se borne à des faces triangulaires; car il suffira toujours de mener des droites de chacun de ces points à ceux qui en seront les plus proches, pour les relier tous par un réseau de triangles.

Cela posé, démontrons que l'aire totale d'une pareille surface polyédrique, arrêtée à un contour se confondant finalement avec celui que l'on assigne, tend vers une limite déterminée quand ses faces, de plus en plus nombreuses et de plus en plus petites, se rapprochent indéfiniment de la surface courbe, en prenant des directions de moins en moins inclinées par rapport aux plans tangents; et nous pourrons évidemment regarder cette limite, aire de la surface polyédrique au moment où se fait son passage à la surface courbe, comme étant l'aire même de celle-ci. Il suffira, conformément à la règle qui permet de reconnaître les quantités variables pourvues de limites, de prouver que, si la première surface proposée a déjà ses faces assez voisines de la surface courbe, assez peu inclinées sur les plans tangents, etc., toutes celles qui viendront après, ou dont les faces ne seront pas moins petites ni moins voisines de la surface, etc., offriront des aires totales différant aussi peu que l'on voudra de la sienne.

A cet effet, considérant successivement chaque face, que j'appellerai ω, de la première surface polyédrique dont il s'agit, imaginons que, de tous les points de son contour, on mène des normales à la surface courbe donnée, plus courtes distances de ces points à celle-ci, et dont l'ordre de petitesse égalera pour le moins celui des dimensions de ω. Autrement dit, supposons qu'une très courte droite mobile, constamment normale à la surface courbe, fasse le tour de la face en question ω; en la prolongeant, s'il le faut, mais sans changer son ordre de grandeur, elle percera sans cesse toute autre des surfaces polyédriques considérées, de manière à y découper dans son mouvement une certaine partie, que j'appellerai ω' (¹). Or, si l'on projette celle-ci, ω', sur le plan de ω, son contour se projettera très sensiblement sur le contour même de ω; car les normales joignant les points correspondants de ces deux contours se projetteront sous des angles très peu différents d'un droit et auront, par suite, leurs projections d'un ordre

(¹) Au n° 5 (p. 14 du Tome Ier), où il s'agissait pareillement de définir la longueur d'un arc de courbe comme limite de lignes polygonales, la division des lignes polygonales en parties correspondantes aurait pu très simplement se faire de même au moyen de plans normaux à la courbe, menés par les sommets de l'une des lignes polygonales à comparer, au lieu de se faire au moyen de perpendiculaires abaissées de ces sommets sur la seconde ligne polygonale, ce qui donne des directions moins graduellement variables.

de petitesse supérieur au leur ou supérieur, par conséquent, à l'ordre même des dimensions de ω. Ainsi, la projection de ω' sur le plan de ω aura avec ω un rapport sensiblement égal à 1. Comme, d'ailleurs, les faces ou portions de faces dont elle sera composée ne feront, avec tous les plans tangents voisins de ω, ou avec ω, que des angles extrêmement petits, donnant très sensiblement l'unité pour le rapport de chaque partie plane de ω' à sa projection partielle et, par suite, pour celui de ω' à la projection totale, c'est le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ lui-même qui prendra la forme $1+\varepsilon$, où ε désigne une quantité évanouissante. Par conséquent, la seconde surface polyédrique dont il s'agit se trouvera décomposée en parties, ω', correspondant aux faces ω de la première, et ayant avec elles des rapports aussi proches que l'on voudra de l'unité; d'où il suit évidemment que le rapport général de ces deux surfaces totales n'est pas moins voisin de la même limite 1, ou que la différence de leurs aires se réduit à une fraction infiniment petite de l'une d'elles, différence négligeable quand ces aires elles-mêmes, évidemment comparables, en général, à celles qu'entourent les projections de leurs contours sur un plan coordonné, sont finies.

Ainsi, le fait de l'existence d'une limite, aire de la surface courbe, est bien démontré. Et l'on remarquera, de plus, que toute partie, ω', très petite en tous sens, de cette aire, aura, à des infiniment petits près, ses divers éléments (limites des facettes de la seconde surface polyédrique), de même direction que le plan tangent mené en un quelconque de ses points; de telle sorte qu'on obtiendra sa projection sur un plan arbitraire donné en multipliant ω' par le cosinus de l'angle de ce plan avec le plan tangent dont il s'agit, *comme si elle était située sur celui-ci.*

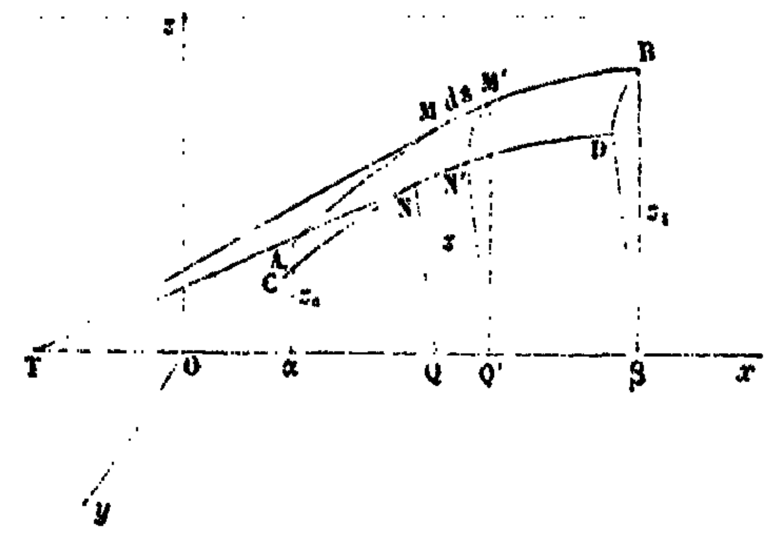
297. — Aire des surfaces de révolution.

Pour mettre sous la forme d'une intégrale définie la valeur de la surface courbe proposée, et en effectuer par là finalement le calcul, continuons à employer le procédé qui nous a déjà conduit aux expressions générales des aires planes, des arcs et des volumes, en divisant la surface en bandes minces, par une famille de plans parallèles aux yz.

Or il est deux cas, particulièrement simples, où, les axes étant supposés rectangulaires, l'une quelconque de ces bandes, comprise par suite entre deux plans normaux aux x et ayant deux abscisses successives x, $x+dx$, s'exprime immédiatement par une différentielle $F(x)dx$, qu'il ne reste plus qu'à intégrer. Le premier, sur lequel nous n'insisterons pas puisqu'il a fait l'objet d'une longue étude (pp. 95 à 107), est

justement le cas extrême ou limite d'une aire plane parallèle aux xy, dont chaque bande égale le produit de sa largeur uniforme, dx, par sa longueur variable d'une abscisse à l'autre, et par conséquent fonction déterminée de x. Le second est le cas de la *surface de révolution* décrite par une courbe plane AMB, tournant autour d'un axe Ox

Fig. 54.



situé dans son plan. On sait que chaque position, AB, CD, ..., de la courbe génératrice, intersection de la surface par un plan mené suivant l'*axe de révolution* Ox, s'appelle, comme ce plan lui-même, un *méridien* de la surface, et que les cercles, perpendiculaires à Ox, décrits par les divers points M, M', ... de la génératrice, ou ayant pour rayons les diverses positions des ordonnées correspondantes $z = \mathrm{MQ}$, $z = \mathrm{M'Q'}$, ... abaissées normalement (dans le plan des zx, par exemple) de la génératrice sur l'axe, sont dits les *parallèles* (c'est-à-dire les cercles parallèles) de la surface; enfin, la portion de celle-ci engendrée, dans une rotation complète, par un segment quelconque de l'arc générateur AMB, et que limitent par conséquent deux cercles parallèles ou deux plans normaux à l'axe de révolution Ox, s'appelle une *zone*.

Il s'agit donc, l'équation $z = f(x)$ de la courbe génératrice étant donnée, de mettre sous la forme $\mathrm{F}(x)\,dx$ l'aire de la zone élémentaire quelconque comprise entre les deux plans consécutifs $x =$ const., $x + dx =$ const., et décrite par un élément $\mathrm{MM'} = ds$ de l'arc AMB. A cet effet, considérons d'abord le fragment de zone MM'N'N engendré, par MM', dans une rotation élémentaire $\mathrm{MQN} = d\theta$ du plan méridien ABx, c'est-à-dire entre les deux positions consécutives AB et CD de la courbe génératrice. Les arcs circulaires MN et M'N', normaux à leurs rayons QM et Q'M', QN et Q'N', le sont, par suite, aux plans AMBx, CNDx auxquels les leurs se trouvent perpendicu-

laires; et les quatre angles du quadrilatère légèrement curviligne MM'N'N sont droits. Donc la projection, qui s'effectue très sensiblement en vraie grandeur, de ce quadrilatère ou élément de zone, sur un plan faisant des angles infiniment petits avec ses plans tangents (comme, par exemple, sur le plan TMN des quatre sommets ou des deux positions successives TMM', TNN' de la corde MM' prolongée), pourra être assimilée à un rectangle ayant ses dimensions exprimées, à des infiniment petits près, par $MM' = ds$ et par $MN = QM \times d\theta = z\,d\theta$. Ainsi, tous les fragments, tels que MM'N'N, de la zone engendrée par l'arc ds, auront l'expression $ds(z\,d\theta)$; et, comme le facteur $d\theta$ y variera seul d'un fragment à l'autre, c'est-à-dire quand le plan méridien ABx, en tournant successivement d'une infinité d'angles $d\theta$, aura fait un tour complet mesuré par l'angle total $2\pi = \int d\theta$, la zone entière vaudra évidemment $z\,ds \int d\theta = 2\pi z\,ds$.

Or il suffit de remplacer, dans cette expression, z par sa valeur $f(x)$, et ds par la sienne $\sqrt{dx^2+dz^2} = \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$, pour lui donner la forme voulue, $F(x)dx$, d'une simple différentielle en x. Puis une intégration de cette expression entre deux limites quelconques, telles que $O\alpha = x_0$ et $O\beta = x_1$, fera connaître l'aire d'une zone de *hauteur* finie $\alpha\beta$. En résumé, l'on aura

$$(13) \qquad \text{Zone} = 2\pi \int_{x=x_0}^{x=x_1} z\,ds = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx.$$

L'intégration qu'indique cette formule est effectuable en termes finis, par les règles données plus haut (XXII[e] et XXIII[e] Leçon), dans un certain nombre de cas, notamment quand il s'agit de la surface d'un ellipsoïde de révolution ou *aplati*, ou *allongé*, c'est-à-dire décrit par une demi-ellipse, terminée aux deux extrémités soit du petit axe, soit du grand axe, et tournant autour de cet axe.

298. — Exemples : corps ronds de la Géométrie élémentaire.

Mais bornons-nous aux *corps ronds* étudiés dans la Géométrie élémentaire, pour retrouver les formules de leur surface convexe, difficiles à y bien établir faute d'une démonstration préalable touchant la possibilité de réduire ces surfaces à des aires planes.

Commençons par le *tronc de cône*, où la courbe AB (p. 128) se réduit à une droite. Alors, si l'on appelle z_0, z_1 les deux ordonnées extrêmes $A\alpha$, $B\beta$, c'est-à-dire les rayons des deux bases du tronc, s l'arc compté à partir de A, l sa longueur totale AB, il est évident que z et s varieront proportionnellement le long de AB, en sorte que le rapport

$\frac{z-z_0}{s}$ sera constant et égal à sa valeur finale $\frac{z_1-z_0}{l}$. On pourra donc écrire

$$\frac{z-z_0}{s}=\frac{z_1-z_0}{l} \quad \text{ou} \quad z=z_0+\frac{z_1-z_0}{l}s.$$

Comme, d'ailleurs, les deux valeurs limites de la variable s seront $s=0$, $s=l$, le second membre de (13) deviendra, en effectuant finalement l'intégration et réduisant,

$$(14)\quad \text{Surf. convexe du tr. de cône}=2\pi\int_0^l\left[z_0+\frac{z_1-z_0}{l}s\right]ds=2\pi\frac{z_0+z_1}{2}l.$$

C'est bien la formule classique; d'où l'on déduit, d'une part, la surface convexe du cylindre, en supposant $z_1=z_0$ et, d'autre part, celle du cône, en faisant $z_0=0$.

Reste à examiner le cas d'une zone sphérique. Alors la courbe génératrice AB est un arc de cercle dont la projection sur Ox, $\alpha\beta=x_1-x_0$, mesure la hauteur h de la zone, tandis que les cercles décrits par les deux ordonnées extrêmes $A\alpha$, $B\beta$ sont ses deux bases. Appelons R le rayon de la sphère dont la zone fait partie, et, l'ordonnée z du demi-cercle générateur de cette sphère étant, en fonction d'une abscisse x comptée à partir du centre, $z=\sqrt{R^2-x^2}$, nous aurons

$$dz=\frac{-x\,dx}{\sqrt{R^2-x^2}};\qquad \text{d'où } ds \text{ ou } \sqrt{dx^2+dz^2}=\frac{R\,dx}{\sqrt{R^2-x^2}}=\frac{R\,dx}{z}.$$

Donc l'expression $z\,ds$ a pour valeur $R\,dx$; et une zone élémentaire $2\pi z\,ds$ équivaut à $2\pi R\,dx$, produit d'une circonférence $2\pi R$ de grand cercle par la hauteur dx. En conséquence, l'aire d'une zone finie, $2\pi R\int dx=2\pi Rh$, s'obtiendra également en multipliant par sa hauteur h la circonférence $2\pi R$ d'un grand cercle de la sphère; et la surface entière de celle-ci, zone de hauteur $2R$ ou comprise entre deux plans tangents parallèles distants d'un diamètre, vaudra

$$(2\pi R)(2R)=4\pi R^2,$$

ou le quadruple d'un grand cercle πR^2; en sorte que l'aire $2\pi R^2$ d'un *hémisphère* sera le double de sa projection πR^2 sur son cercle de base.

299. — Réduction, à une intégrale définie, de l'aire d'une surface courbe quelconque.

Passons maintenant au cas général d'une surface quelconque rapportée à un système d'axes rectangles; et voyons comment s'y expri-

mera, sous la forme $F(x)dx$, l'aire de la bande élémentaire comprise entre deux plans consécutifs quelconques normaux aux x, ou ayant les abscisses respectives x, $x+dx$. Nous ne pourrons plus, comme quand la bande était plane, l'évaluer d'un coup, ni, comme lorsqu'elle était de révolution, la partager en rectangles infiniment petits dans les deux sens et ayant tous un côté de même longueur; mais, du moins, son partage en fragments de dimensions infiniment petites donnera des éléments assimilables à des aires planes, ou dont la projection sur un plan quelconque, celui des xy par exemple, se fera en les multipliant par le cosinus de l'angle, γ, d'une de leurs normales avec la normale à ce plan, c'est-à-dire avec l'axe des z dans l'exemple en question. Et, à l'inverse, les éléments d'aire obtenus seront les quotients respectifs de leurs projections sur le plan des xy par ce cosinus.

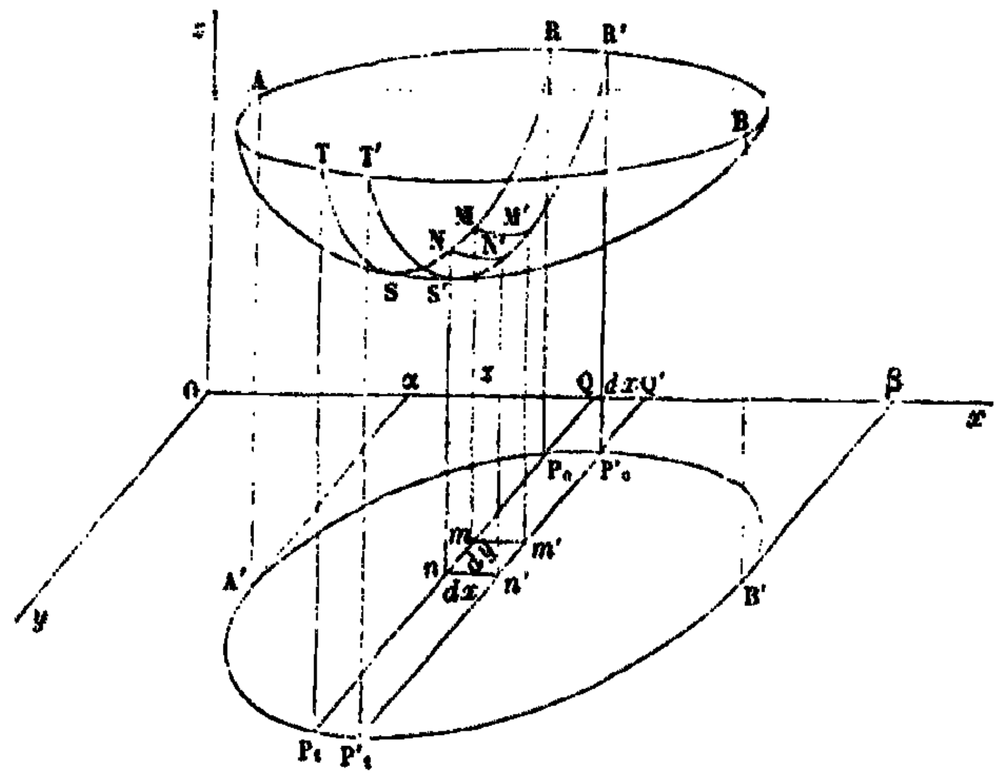
Or, dans le problème analogue de l'évaluation des tranches élémentaires σdx composant un volume, l'expression, en intégrale définie, des bases σ des tranches, a été formée en menant le système des plans normaux à l'axe des y, ou dont deux consécutifs ont respectivement y, $y+dy$ pour leur coordonnée constante suivant cet axe. On procédera donc ici de même, c'est-à-dire que l'on partagera la bande considérée de surface en éléments infiniment petits dans les deux sens, au moyen de la famille de plans $y=$ const.; et, en effet, la construction de cette seconde famille $y=$ const. n'est pas moins naturelle que celle de la première $x=$ const., quand l'équation de la surface, mise sous la forme $z=f(x,y)$, attribue aux deux coordonnées x et y un rôle pareil.

Mais, pour plus de clarté, fixons d'une manière précise les données du problème. Supposons qu'on ait partagé la surface courbe en parties, comme ARBTS (p. 132), dont chacune admette au plus une ordonnée z pour un système quelconque de valeurs des deux autres coordonnées x, y, ou ne se trouve percée qu'en un seul point par toute parallèle à l'axe des z; et soient $z=f(x, y)$ l'expression connue de cette ordonnée; p, q, comme à l'ordinaire, ses deux dérivées partielles en x et y. La courbe limite ARBT de la surface qu'il s'agit d'évaluer sera définie au moyen de son *contour apparent* $A'P_0B'P_1$, dont l'équation en x et y, résolue par rapport à y, donnera deux valeurs au moins, comme $y=QP_0$ et $y=QP_1$, pour chaque abscisse $x=OQ$ comprise entre celles, $O\alpha$, $O\beta$, des tangentes $A'\alpha$, $B'\beta$ menées à ce contour apparent parallèlement à l'axe des y. Et si l'on a soin d'ailleurs de ne considérer à la fois qu'une partie assez peu étendue de la surface courbe, il n'y aura évidemment, sur le contour dont il s'agit, pas plus de deux ordonnées y pour une seule abscisse x : j'ap-

pellerai y_0 la plus petite QP_0, y_1 la plus grande QP_1, et, respectivement, $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ leurs expressions.

Cela posé, soit RR'T'T la bande de surface à évaluer, comprise

Fig. 55.



entre deux plans consécutifs normaux aux x, QP_0RTP_1, $Q'P'_0R'T'P'_1$, ayant pour abscisses x et $x+dx$. Le système des plans perpendiculaires à Oy la divisera en éléments d'une courbure insensible, comme MM'N'N, qui se projetteront sur le plan des xy suivant des rectangles, tels que $mm'n'n$, d'une largeur constante $mm' = QQ' = dx$, et d'une longueur, mn, variable ou non, mesurant l'espacement dy de deux plans consécutifs de ce second système. On aura donc, si γ désigne l'angle aigu de la normale à la surface, en M, avec l'axe des z, angle dont le cosinus a pour inverse $\sqrt{1+p^2+q^2}$ (t. I, p. 258),

$$\text{Aire } mm'n'n = dx\,dy \quad \text{et} \quad \text{Aire MM'N'N} = \frac{dx\,dy}{\cos\gamma} = \sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy.$$

Ainsi se trouve exprimé un élément de bande, en fonction de dx, dy et des coordonnées x, y de son *premier* sommet M, qui est celui pour lequel ces coordonnées sont les moindres. Or, quand on considère successivement, pour en faire la somme, tous les éléments, comme MM'N'N, d'une même bande, les deux quantités $x = OQ$ et $dx = QQ'$ sont invariables, tandis que y varie avec continuité, par accroissements dy, comme mn, uniformes ou non, depuis $y_0 = QP_0 = \varphi_0(x)$ [ou plutôt depuis une valeur infiniment peu supérieure à celle-là, si l'on ne veut

pas compter un élément de surface, insignifiant, ébréché par le contour], jusqu'à $y_1 = QP_1 = \varphi_1(x)$ [sauf, de même, une erreur négligeable]. Donc la sommation des éléments composant la bande RR'T'T donnera, par le transport du facteur commun dx hors du signe $\int$, la formule cherchée,

$$(15) \qquad \text{Aire RR'T'T} = \left(\int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} \sqrt{1+p^2+q^2}\,dy\right)dx,$$

dans le second membre de laquelle l'intégration indiquée doit se faire uniquement, comme on voit, par rapport à y, c'est-à-dire pour une valeur invariable OQ de la quantité x dont dépend aussi la fonction $\sqrt{1+p^2+q^2}$. Mais, les deux limites $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ de y dépendant de x, le résultat de cette intégration indiquée par $\int\sqrt{1+p^2+q^2}\,dy$ devient, en définitive, une certaine fonction F de x seul, comme il arrivait dans le calcul de la base σ d'une tranche élémentaire $\sigma\,dx$ quand il s'agissait d'évaluer un volume. Donc l'expression (15) de l'aire d'une bande sera bien de la forme voulue $F(x)dx$; et une deuxième intégration, par rapport à x, entre les deux abscisses extrêmes $O\alpha = x_0$, $O\beta = x_1$, donnera, pour obtenir l'aire demandée de la surface courbe ARBTS, la formule générale

$$(16) \qquad \text{Aire} = \int_{x_0}^{x_1}\left(\int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} \sqrt{1+p^2+q^2}\,dy\right)dx.$$

300. — Exemples : surfaces d'un triangle sphérique trirectangle et de la voûte de Viviani.

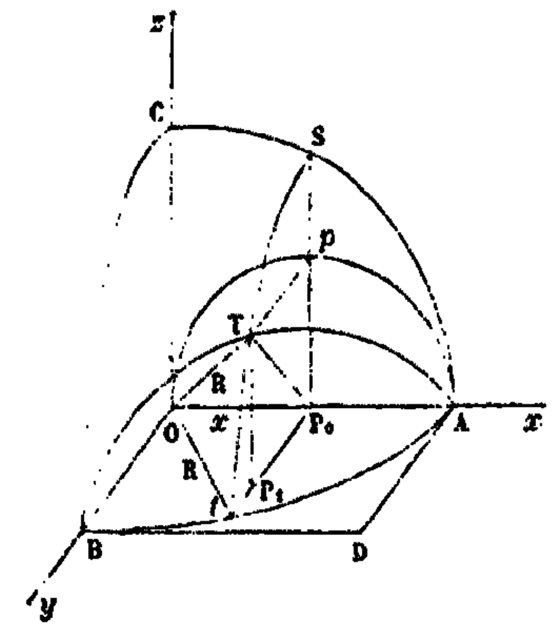
Pour montrer l'usage de cette formule (16), appliquons-la au calcul de l'aire du triangle sphérique trirectangle ABC (p. 134) appartenant à la sphère $x^2+y^2+z^2=R^2$ et compris dans l'angle des coordonnées positives, ainsi qu'à ce qui reste de ce triangle curviligne quand on en ôte toute la partie, ATBt, dont la projection sur le plan des zx est le demi-cercle ApO décrit sur OA comme diamètre. On y aura évidemment $x_0 = 0$, $x_1 = OA = R$. De plus, la section de la surface par le plan SP$_0t$, d'une abscisse constante $x = OP_0$ comprise entre zéro et R, sera le quart de petit cercle St pour le triangle, mais seulement sa partie ST, projetée en Sp sur le plan des zx et en P_0P_1 sur celui des xy, pour l'aire BTAC que l'on veut évaluer à part : d'où il résultera, dans le premier cas,

$$y_0 \text{ ou } \varphi_0(x) = 0, \qquad y_1 \text{ ou } \varphi_1(x) = P_0t = \sqrt{\overline{Ot}^2 - \overline{OP_0}^2} = \sqrt{R^2 - x^2},$$

et, dans le second cas,

$$\begin{cases} y_0 = 0, \\ y_1 = P_0P_1 = \sqrt{\overline{P_0T}^2 - \overline{P_0p}^2} = \sqrt{(R^2-x^2) - \overline{P_0O}\,.\,\overline{P_0A}} \\ \quad = \sqrt{(R^2-x^2) - x(R-x)} = \sqrt{R(R-x)}. \end{cases}$$

Fig. 56.



L'équation $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ donnant d'ailleurs $p = \dfrac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$, $q = \dfrac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$ et, par conséquent, $\sqrt{1+p^2+q^2} = \dfrac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$, la formule (16), où l'on pourra faire sortir le facteur constant R des signes $\int$, deviendra : 1° pour le triangle sphérique,

$$(17) \qquad \text{Aire sphér. ABC} = R\int_0^R \left(\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right) dx;$$

2°, dans l'autre cas,

$$(18) \qquad \text{Aire sphér. ATBCA} = R\int_0^R \left(\int_0^{\sqrt{R(R-x)}} \frac{dy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right) dx.$$

Or, quand on intègre $\dfrac{dy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$, la quantité $R^2 - x^2$ ou $\overline{P_0t}^2$ joue le rôle d'une constante positive β^2, et la formule (23) de la XXIe Leçon (p. 25) donne comme résultat, à partir de la limite $y = 0$, arc sin $\dfrac{y}{\sqrt{R^2-x^2}}$, c'est-à-dire $\dfrac{\pi}{2}$, quand la limite supérieure est $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, et arc sin $\sqrt{\dfrac{R}{R+x}}$, quand elle est $y = \sqrt{R(R-x)}$.

Le second membre de (17) devient donc R $\int_0^R \frac{\pi}{2}\, dx = \frac{\pi}{2}R^2$, ou le double de la projection AOB $= \frac{\pi}{4}R^2$ du triangle sphérique ABC sur le plan des xy. Il en résulterait bien, pour un hémisphère entier 4(ABC), une aire égale à deux fois son cercle de base πR^2.

Quant au second membre de (18), si l'on observe que l'angle aigu dont le sinus est $\sqrt{\frac{R}{R+x}}$ a pour cosinus $\sqrt{\frac{x}{R+x}}$ et pour cotangente $\sqrt{\frac{x}{R}}$, il prend la forme $R^2\int_0^R \left(\operatorname{arc\,cot}\sqrt{\frac{x}{R}}\right)\frac{dx}{R}$, que l'on réduit à $R^2\int_{u=0}^{u=1}(\operatorname{arc\,cot} u)\, d(u^2)$, en appelant u et introduisant comme variable d'intégration, au lieu de x, le rapport $\sqrt{\frac{x}{R}}$, croissant de zéro à 1 pendant que x grandit de zéro à R. Or une intégration par parties, où l'on observera que $-u^2 d \operatorname{arc\,cot} u = \frac{u^2\, du}{1+u^2} = du - \frac{du}{1+u^2}$, donne

$$\left\{\begin{aligned} \int(\operatorname{arc\,cot} u)\, d(u^2) &= u^2 \operatorname{arc\,cot} u - \int u^2 d \operatorname{arc\,cot} u \\ &= u^2 \operatorname{arc\,cot} u + u - \operatorname{arc\,tang} u + \text{const.}, \end{aligned}\right.$$

c'est-à-dire simplement 1, entre la limite $u = 0$, qui annule les trois termes variables du dernier membre, et la limite $u = 1$, qui rend égaux $\operatorname{arc\,tang} u$ et $\operatorname{arc\,cot} u$. Par conséquent, la formule (18) devient

$$(19) \qquad \text{Aire sphér. ATBCA} = R^2 = \text{le carré ADBO.}$$

Ce résultat remarquable est dû à Viviani, géomètre italien du XVII^e siècle. Il en déduisit qu'une voûte hémisphérique mince, composée de quatre triangles trirectangles, comme ABC, réunis autour du sommet C, acquiert une surface extérieure commensurable, égale au carré du diamètre 2R de sa base, quand on y ouvre quatre fenêtres pareilles à AtBT, ou se projetant suivant deux demi-cercles sur le plan diamétral des zx.

On remarquera que, si le triangle sphérique entier ABC est le double de sa projection AOBt sur le plan des xy, la surface partielle ATBCA vaut seulement une fois et demie la sienne. En effet, l'expression de celle-ci, vu la valeur $\sqrt{R(R-x)}$ de l'ordonnée $y = P_0P_1$ du point T, est

$$\int_0^R \sqrt{R(R-x)}\, dx = -\frac{2}{3}\sqrt{R}\left[(R-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^R = \frac{2}{3}R^2 = \frac{2}{3}\,\text{aire ATBCA}.$$

Les deux surfaces considérées ABC et ATBCA présentent donc, quoique la seconde seule soit commensurable, ce caractère commun, d'avoir des rapports commensurables et aussi simples que possible avec leurs projections sur le plan des xy [1].

301*. — Division d'une surface en bandes de pente uniforme; aire de l'ellipsoïde.

(Compléments, p. 70*.)

302*. — Évaluation des volumes et des aires courbes en coordonnées polaires.

(Compléments, p. 75*.)

---

[1] Il est clair qu'une infinité de plans voisins menés suivant l'axe vertical des z découperont le triangle sphérique CAB et sa projection OAB dans les mêmes rapports, et donneront ainsi, à partir du sommet C, des demi-fuseaux élémentaires, encore doubles des secteurs de cercle, rangés autour de O, qui seront leurs projections sur le plan xOy. Or, comme l'un quelconque de ces demi-fuseaux peut évidemment (à des infiniment petits près d'ordre supérieur) être censé appartenir au quart de cylindre circulaire à génératrices horizontales, qui lui est circonscrit, on voit qu'un tel demi-fuseau ou demi-onglet *cylindrique* élémentaire, contigu à une ligne de plus grande pente du quart de cylindre, vaut également le double du triangle infiniment aigu constituant sa projection horizontale. Enfin, si les deux plans verticaux qui limitent latéralement ce *demi-onglet* ou *demi-coin cylindrique* élémentaire s'écartent, en tournant autour de leur intersection, de manière à comprendre entre eux, dans le même quart de cylindre, un demi-coin d'un angle fini quelconque, tous les éléments soit du demi-onglet, soit de sa projection sur le plan xOy, limités par des génératrices consécutives ou par leurs projections horizontales, grandiront, comme ces génératrices mêmes, dans un rapport commun. Par conséquent, le *demi-onglet ou demi-coin cylindrique ne cessera pas d'être le double de sa projection horizontale triangulaire.*

VINGT-HUITIÈME LEÇON.

INTÉGRALES MULTIPLES ET LEUR USAGE; CENTRE DE GRAVITÉ DES FIGURES; VOLUME ET SURFACE LATÉRALE DU TRONC DE PRISME; THÉORÈME DE GULDIN.

303. — Des intégrales doubles; exemple qu'en donne l'expression générale d'un volume en coordonnées rectangulaires.

Le calcul des volumes et des surfaces courbes nous a conduits, dans la dernière Leçon, à des expressions de la forme

$$\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} \mathrm{F}(x,y)\,dy\right]dx,$$

où le produit d'une fonction F de deux variables indépendantes x et y par leurs différentielles dx, dy se trouve intégré une première fois par rapport à l'une de ces variables, y, entre deux limites dépendant de l'autre, x, restée constante ainsi que sa différentielle dx pendant cette intégration, et où le résultat ainsi obtenu, de la forme $f(x)dx$, est lui-même intégré ensuite par rapport à cette autre variable x, entre deux limites données. L'on donne à une telle somme le nom d'*intégrale double*, pour la distinguer de celles qui, comme $\int_a^b f(x)dx$, impliquent une seule intégration; et les termes élémentaires dont elle se compose, ou qui sont affectés des deux facteurs infiniment petits dx, dy, s'appellent les *éléments* de l'intégrale, tandis que leur expression commune, $\mathrm{F}(x,y)dxdy$, en est dite l'*élément* général. L'intégrale comprend, comme on voit, une double infinité de valeurs successives de celui-ci, $\mathrm{F}(x,y)dxdy$, obtenues en faisant varier x et y, avec continuité, dans tout le *champ* que définissent les limites et qu'entoure, sur le plan des xy (quand x et y sont des coordonnées), la courbe fermée dont les diverses parties ont pour équations $y=\varphi_0(x)$, $y=\varphi_1(x)$, $x=x_0$ et $x=x_1$.

Ces détails ressortent surtout de l'évaluation générale des aires courbes (p. 132): mais, comme la fonction qui s'y présente sous les signes $\int$, savoir $\sqrt{1+p^2+q^2}$, n'a pas des rapports simples avec la

seule, $z = f(x, y)$, donnée alors immédiatement, et qu'elle ne peut même recevoir des valeurs absolues quelconques (puisqu'elle dépasse nécessairement l'unité), il y a lieu de demander aux volumes, plutôt qu'aux surfaces, la représentation purement géométrique générale des intégrales doubles, de même qu'on a eu recours aux aires, et non aux arcs, pour avoir, en géométrie plane, une expression générale et purement géométrique des intégrales simples.

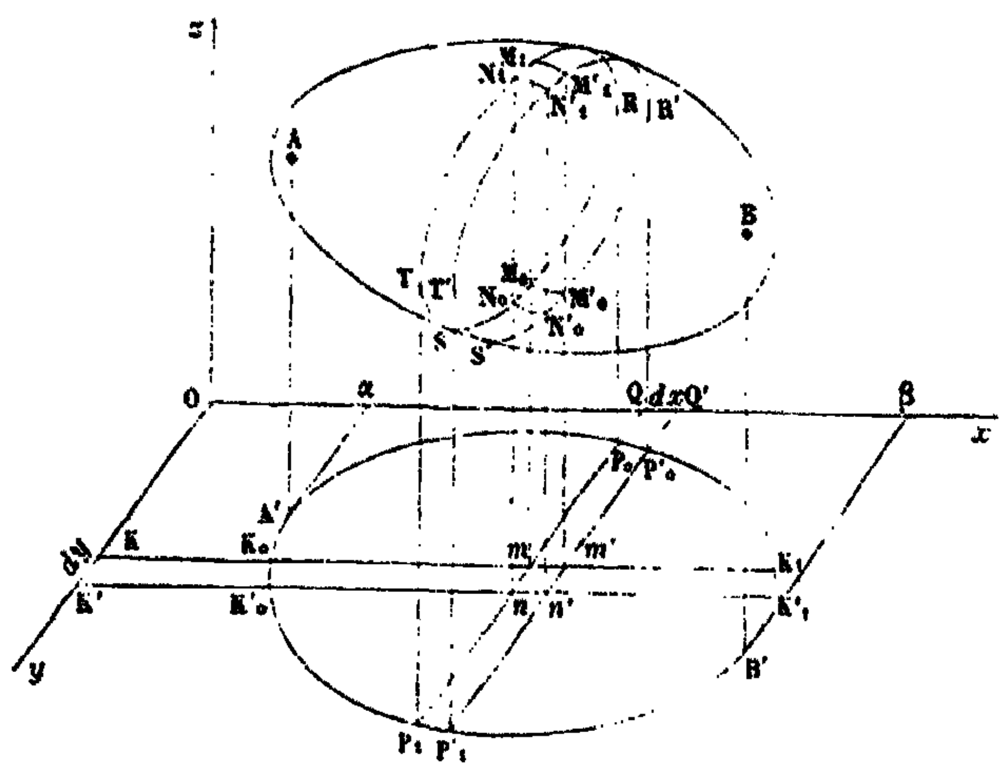
Rappelons-nous donc la manière dont s'évalue un volume, en nous bornant d'ailleurs au cas d'axes rectangulaires, mais en indiquant analytiquement le détail des opérations, ce que nous n'avons pas encore fait.

Soient AB le corps dont il s'agit d'exprimer le volume et A′B′ son contour apparent sur le plan des xy. Admettons que, pour tous les points (x, y) intérieurs à ce contour, m par exemple, la surface ait seulement deux ordonnées ou valeurs de z, savoir la plus grande mM_1, que nous appellerons z_1, et la plus petite mM_0, que nous appellerons z_0. L'équation de la surface, résolue par rapport à z, les fera connaître en fonction de x et y : nous les représenterons par $f_1(x, y)$ et par $f_0(x, y)$, c'est-à-dire que nous poserons

$$(1) \qquad mM_1 \text{ ou } z_1 = f_1(x, y), \qquad mM_0 \text{ ou } z_0 = f_0(x, y).$$

Admettons de même que l'équation en x et y du contour apparent

Fig. 57.



donne seulement, pour chaque valeur $OQ = x$ de l'abscisse, deux ordonnées $y_0 = QP_0$, $y_1 = QP_1$, et désignons-les respectivement par

$\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, comme quand il s'agissait du contour apparent d'une portion de surface courbe. Enfin, appelons x_0, x_1 la plus petite, $O\alpha$, et la plus grande, $O\beta$, des abscisses à considérer, savoir, celles des points A, B où le corps est touché par deux plans tangents $\alpha A'A$, $\beta B'B$ normaux aux x, et des points A', B' de contact du contour apparent avec deux tangentes $\alpha A'$, $\beta B'$ parallèles à l'axe des y.

Cela posé, souvenons-nous que le volume s'obtient en divisant le corps, par des plans normaux aux x, en tranches minces, dont l'une quelconque, RSTT'R'S', a pour mesure le produit de son épaisseur, espacement $dx = QQ'$ de deux consécutifs de ces plans, par la section $RST = \sigma$ que le premier d'entre eux, d'abscisse x, fait dans le corps; et que l'aire σ elle-même s'évalue par un partage en bandes étroites, opéré au moyen d'un second système de plans, normaux aux y ou ayant leur équation de la forme $y = \text{const}$.

L'une quelconque de ces bandes, comprise, par exemple, entre les deux plans KmM_1, $K'nN_1$, que caractérisent les deux valeurs consécutives $OK = y$ et $OK' = y + dy$ de leur paramètre, est $M_0M_1N_1N_0$ et égale le produit de sa longueur M_0M_1 par sa largeur $mn = KK' = dy$. La partie du produit $\sigma\,dx$, c'est-à-dire de la tranche RSTT'R'S', qui lui correspond, sera donc, analytiquement,

$$M_0M_1N_1N_0 \times dx = M_0M_1 \times mn \times mm' = M_0M_1 \times dx\,dy,$$

et, géométriquement, le filet adjacent prismatique $M_0N'_1$ compris entre les deux éléments $M_0M'_0N'_0N_0$, $M_1M'_1N'_1N_1$ de la surface, qui se projettent sur le plan des xy suivant le rectangle $mm'n'n = dx\,dy$. Effectivement, ce filet ne diffère du prisme droit compris entre les quatre mêmes faces latérales avec M_0M_1 pour hauteur, que par deux tronçons, évidemment négligeables, en M_0 et M_1, additifs ou soustractifs; de sorte que l'élément cherché de volume est bien

$$M_0M_1 \times mm'n'n = M_0M_1 \times dx\,dy.$$

Or, comme

$$M_0M_1 = mM_1 - mM_0 = z_1 - z_0 = f_1(x,y) - f_0(x,y),$$

cet élément a pour expression

$$(z_1 - z_0)\,dx\,dy \quad \text{ou} \quad [f_1(x,y) - f_0(x,y)]\,dx\,dy: \tag{2}$$

l'élément $M_0M_1N_1N_0$ ou $M_0M_1 \times dy$ de la section σ égalerait $(z_1 - z_0)dy$, ou aurait en moins le facteur dx.

La tranche RSTT'R'S' égalera la somme de tous les filets pareils compris entre les deux plans QM_1P_1, $Q'M'_1P'_1$, ou pour lesquels x et

dx ont les valeurs constantes OQ, QQ′, tandis que y y croît depuis $QP_0 = y_0 = \varphi_0(x)$ jusqu'à $QP_1 = y_1 = \varphi_1(x)$. Son expression sera donc

$$\left\{\int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} [f_1(x,y) - f_0(x,y)]\,dy\right\} dx.$$

ou mieux

$$dx \int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} [f_1(x,y) - f_0(x,y)]\,dy,$$

en plaçant ainsi le facteur dx avant le signe $\int$, afin de n'avoir pas à entourer d'une parenthèse l'intégrale prise par rapport à y. Et l'on voit que cette valeur de la tranche est bien $\sigma\,dx$, car on aurait évidemment $\sigma = \int_{y_0}^{y_1} (z_1 - z_0)\,dy$. Il viendra ensuite pour la somme des tranches du corps AB, c'est-à-dire pour le volume qu'il s'agit d'exprimer, l'intégrale double

$$\text{(3)} \qquad \text{Volume} = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} [f_1(x,y) - f_0(x,y)]\,dy.$$

Le second membre se réduit à $\int_{x_0}^{x_1} dx \int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} f(x,y)\,dy$, quand on prend $z_0 = 0$ et $z_1 = f(x,y)$, c'est-à-dire quand il s'agit d'indiquer le volume qui, se projetant sur le plan des xy dans tout l'intérieur du contour donné A′B′, est, de plus, compris depuis ce plan jusqu'à la surface dont l'ordonnée z égale une fonction quelconque assignée $f(x,y)$ des deux autres coordonnées x, y. Le volume ainsi défini, et que l'on peut écrire, plus brièvement, $\int\int f(x,y)\,dx\,dy$, constitue donc une représentation géométrique nette d'une intégrale double, pourvu que l'on y regarde comme négatives les parties situées, par rapport au plan des xy, du côté des z négatifs, ou composées de filets prismatiques $z\,dx\,dy$ ayant pour hauteur une ordonnée z négative, et chargés, par conséquent, de figurer des éléments $f(x,y)\,dx\,dy$ négatifs eux-mêmes.

301. — Des intégrales triples; exemples qu'en fournissent l'expression d'une masse et le calcul de la valeur moyenne d'une fonction de point dans une étendue à trois dimensions.

Mais, pour revenir à notre exemple du volume d'un corps quelconque, les filets élémentaires $(z_1 - z_0)\,dx\,dy$, comme M_0N_1' (p. 138), sont-ils bien les véritables éléments de volume, c'est-à-dire des élé-

ments tels, qu'il ne puisse pas y avoir lieu de les réduire? Ces filets ayant conservé une dimension finie, la longueur M_0M_1, il est évident qu'on obtiendra des volumes plus simples encore, en rendant cette dimension elle-même infiniment petite. Il suffira, pour cela, de mener un troisième système de plans, normaux à Oz, de même qu'on en a mené de normaux soit à Ox, soit à Oy. Alors le filet $M_0N'_1$ se trouvera partagé, abstraction faite, à chaque bout, d'un tronçon négligeable, en une infinité de parallélépipèdes rectangles, dont les trois dimensions infiniment petites égaleront les trois accroissements, dx, dy, dz, qu'éprouveront les coordonnées respectives caractérisant les plans menés dans les trois systèmes par les divers points (x, y, z), quand on passera de chacun de ces plans au plan suivant du même système.

En conséquence, l'on aura, pour le véritable élément de volume, l'expression générale, $dx\,dy\,dz$, des parallélépipèdes ainsi construits, et ce n'est pas deux intégrations, mais trois, que demandera le calcul d'un volume fini. Effectivement, le filet $M_0N'_1$ étant la somme des parallélépipèdes rangés en une file parallèle aux z, ou pour lesquels les coordonnées x, y d'une arête, et leurs accroissements dx, dy de cette arête aux voisines, sont les quantités constantes $x = OQ$, $y = Qm$, $dx = mm'$, $dy = mn$, l'on formera sa valeur en opérant une première sommation, par rapport à z, c'est-à-dire sans faire varier ni x, ni y, ni leurs différentielles dx, dy. Celles-ci constituent donc alors, dans $\int dx\,dy\,dz$, deux facteurs communs à tous les éléments; et la somme obtenue est $dx\,dy\int dz$, ou, sous une forme plus explicite, $dx\,dy\int_{z_0}^{z_1} dz$, puisque z y croît, dans l'intérieur du corps, depuis la valeur $mM_0 = z_0$ jusqu'à la valeur $mM_1 = z_1$. Nous savons d'ailleurs comment une intégration, en y, groupe ensuite toutes les sommes analogues, où x et dx ont de mêmes valeurs comme OQ et QQ', pour donner l'expression, $dx\int_{y_0}^{y_1} dy\int_{z_0}^{z_1} dz$, d'une tranche RSTT'R'S', et comment, enfin, toutes les tranches s'ajoutent dans une troisième intégration, par rapport à x, qui donne ainsi, sous deux formes équivalentes, comme expression générale la plus naturelle d'un volume V,

$$(4)\qquad V = \int_{x=x_0}^{x=x_1}\int_{y=y_0}^{y=y_1}\int_{z=z_0}^{z=z_1} dx\,dy\,dz = \int_{x_0}^{x_1} dx\int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} dy\int_{f_0(x,y)}^{f_1(x,y)} dz.$$

Si cette expression se réduit à l'intégrale double (3) [p. 140], c'est uniquement parce que la première intégration à opérer, du produit

$dx\,dy\,dz$, ne portant que sur la différentielle exacte dz, a pour résultat $(z)_{z_0}^{z_1} = z_1 - z_0$ et, une fois faite ainsi dans tous les cas, ne laisse plus subsister que l'indication des deux intégrations en x et y.

Or il est d'autres questions, également relatives à un espace triplement étendu, où aucune des trois intégrations ne s'effectuera d'une manière générale et immédiate. Supposons qu'on demande, par exemple, la masse totale d'un corps de la forme considérée AB (p. 138), sachant que chaque fragment de sa matière, infiniment petit en tous sens, a pour *densité* une certaine fonction continue $F(x, y, z)$ des trois coordonnées x, y, z, ou, autrement dit, que le rapport de la masse de toute partie très restreinte, entourant le point (x, y, z), à son volume, y tend vers la valeur $F(x, y, z)$ quand on réduit de plus en plus et indéfiniment cette partie (1). Il est évident que si, dans un tel

---

(1) *Note sur la notion de densité.*

Au commencement du Tome I (p. 20), pour obtenir une représentation commode des fonctions de point, nous avons imaginé qu'une matière primitivement *homogène* eût été pulvérisée uniformément et en quelque sorte infiniment, ou divisée en parties égales d'une ténuité extrême, puis répandue, d'après une loi quelconque de distribution, dans certaines régions assignées de l'espace, et nous avons appelé *masse* de toute portion de cette matière sa quantité même, mesurée par le nombre de ses parties, ou plutôt, vu la très grande valeur de ce nombre, par un autre proportionnel, mais de grandeur ordinairement modérée. La notion de masse, restreinte, comme on voit, à son cas le plus simple, étant ainsi fixée, il nous a suffi, pour obtenir celle de la *densité* de la matière en chaque endroit (x, y, z), de concevoir une sphère extrêmement petite et mobile, d'un rayon constant, dont le centre viendrait successivement dans toutes les positions : la *densité* au point quelconque (x, y, z) a été définie le rapport de la masse contenue dans cette sphère quand son centre arrive en (x, y, z), à celle qui s'y trouve quand ce centre occupe une place déterminée, autour de laquelle la matière est supposée répartie d'une certaine manière choisie comme terme de comparaison.

Il nous reste à compléter cette notion, maintenant que nous avons acquis une idée plus nette de la quantité appelée *volume* d'un espace, et de l'invariabilité de sa mesure en unités cubiques, infiniment petites, le remplissant par leur juxtaposition, mais arbitrairement orientées à son intérieur. En effet, nous avons encore à reconnaître que la densité est, pour chaque endroit, en relation simple avec la quantité de matière qu'y contient tout volume très petit *de forme quelconque*, et à montrer aussi, avec la plus grande précision possible, que la densité peut être une fonction de point tout à fait arbitraire.

Représentons-nous, pour cela, l'espace divisé, par trois systèmes de plans équidistants parallèles aux plans coordonnés, en cubes élémentaires égaux, ε^3, dont j'appelle, comme on voit, ε l'arête infiniment courte; et concevons que l'on place dans chacun une masse de l'ordre de ε^3, graduellement variable de l'un à l'autre. Toute surface fermée extrêmement petite, décrite autour d'un même point (x, y, z),

cas, l'on considère une particule infiniment petite en tous sens et dont un point ait certaines coordonnées x, y, z, des fragments quelconques de cette particule posséderont, vu leurs coordonnées infiniment peu différentes de x, y, z, des densités infiniment peu différentes aussi de $F(x, y, z)$. Par suite, la masse de chaque fragment égalera sensiblement le produit de son volume par $F(x, y, z)$, et la masse de toute la particule aura, de même, comme expression, le produit de $F(x, y, z)$ par la somme des volumes des fragments, qui est le volume entier de la particule. Donc la somme des produits pareils, pour toutes les particules infiniment petites en tous sens, mais d'ailleurs arbitraires, en lesquelles on aura décomposé le corps, représentera sa masse totale.

Ce sera, comme on voit, une quantité ne dépendant nullement, à la limite, du mode de division adopté du volume; et il le faut bien, puisque, de toute manière, les mêmes fragments ou fragments de fragments se retrouveront, multipliés par des valeurs de $F(x, y, z)$ ne différant qu'infiniment peu, c'est-à-dire présentant des écarts inca-

---

renfermera, d'une part, un volume proportionnel au nombre des cubes ε^3 contenus dans son intérieur, et, d'autre part, les masses sensiblement égales occupant ces cubes, c'est-à-dire, en tout, une masse proportionnelle (sauf erreur négligeable) au volume total, et du même ordre que celui-ci. Par conséquent, pour tout fragment infinitésimal de la matière existant en un certain endroit, le rapport, fini, de la masse au volume, est indépendant de sa forme et de ses dimensions, ou a la même valeur que dans la sphère employée pour y définir la densité; et si, par un choix convenable de l'échelle des nombres proportionnels mesurant les masses, l'on a eu soin, comme nous l'admettrons, de prendre ce rapport égal à 1 dans la matière type à laquelle on compare toutes les autres (plus ou moins dilatées ou condensées), la densité égalera partout, ainsi qu'il est dit ci-dessus dans le texte, le rapport de la masse d'un fragment matériel, infiniment petit en tous sens, mais d'ailleurs quelconque, à son volume. Ce sera bien, en outre, une fonction des coordonnées x, y, z arbitrairement variable d'un endroit à l'autre; car sa valeur au point quelconque (x, y, z) exprimera le quotient, par le volume ε^3, de la masse *arbitraire* placée initialement dans le cube ε^3 contenant ce point.

Toutefois, la valeur ainsi définie ne deviendra jamais négative; et si l'on veut trouver dans les notions de masse et de *densité* une manière simple de se représenter toutes les fonctions possibles de point (ce que nous nous sommes proposé de faire dès la page 20 du Tome I), il faudra, soit concevoir deux sortes *opposées* de matière dont les masses et, par suite, les densités puissent se prendre dans des sens ou avec des signes contraires, soit plus simplement, après avoir imaginé des corps très massifs, convenir de retrancher de toutes leurs densités une forte partie *commune*, censée connue, et de ne faire attention qu'à l'*excédent positif* ou *négatif* (auquel on réservera dès lors le nom de *densité*) de chaque densité effective totale sur cette partie commune. En d'autres termes, on fera choix pour les densités, comme il est d'usage de le faire pour les températures, d'une *origine* différente du commencement ou point de départ de ces grandeurs, d'après le principe employé d'abord (t. I, pp. 2 et 21) pour les espaces et les temps.

pables de donner, dans toute étendue finie, autre chose qu'une différence totale évanouissante.

Nous pourrons donc effectuer la division en particules au moyen de nos trois systèmes de plans normaux respectivement à Ox, Oy, Oz et prendre, dans chaque particule, comme facteur destiné à multiplier son volume, la valeur de la fonction F à son sommet (x, y, z) qui a les coordonnées les plus petites; ce qui donnera, pour sa masse, l'expression $F(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$. Et le groupement de tous les éléments analogues de masse se fera ensuite comme quand il s'agissait du simple volume. Il viendra

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \text{Masse du corps} &= \int_{x=x_0}^{x=x_1}\int_{y=y_0}^{y=y_1}\int_{z=z_0}^{z=z_1} F(x, y, z)\,dx\,dy\,dz \\ &= \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} dy \int_{f_0(x,y)}^{f_1(x,y)} F(x, y, z)\,dz. \end{aligned}\right.$$

Ici aucune des intégrations ne s'effectue immédiatement, et il faudra, pour en tenter le calcul, connaître dans chaque cas $F(x, y, z)$.

On se trouve conduit à des opérations analogues lorsque $F(x, y, z)$ cesse d'être une densité pour devenir une fonction quelconque de point, c'est-à-dire des coordonnées x, y, z, et qu'on demande la moyenne de ses valeurs dans tout l'intérieur de l'espace AB. Alors il faut concevoir le volume, que j'appellerai V, de cet espace, partagé en un nombre infiniment grand, n, de parties égales infiniment petites en tous sens, et puis diviser par n la somme des valeurs prises par $F(x, y, z)$ en un point de chacune de ces parties, choisi d'ailleurs comme on voudra. Or ce quotient $\frac{\Sigma F(x, y, z)}{n}$, que l'on peut, si dV désigne l'une quelconque des parties en question, écrire $\frac{\Sigma F(x, y, z)\,dV}{n\,dV}$, ou encore $\frac{\Sigma F(x, y, z)\,dV}{V}$, est indépendant du mode de division; car il est clair, par un raisonnement précédent (p. 143), que la somme $\Sigma F(x, y, z)\,dV$ restera la même, si l'on rend arbitrairement inégaux et dissemblables les éléments dV de volume, et si l'on change infiniment peu, à volonté, les points (x, y, z) pour lesquels s'y évalue la fonction $F(x, y, z)$. Donc rien n'empêche d'adopter, d'une part, comme éléments de volume, les parallélépipèdes rectangles $dx\,dy\,dz$, d'autre part, comme valeurs correspondantes de F, celles de cette fonction en leurs points (x, y, z) ayant les coordonnées les plus petites; et il vient

$$(6)\quad \text{Valeur moy. de } F(x, y, z) = \frac{1}{V}\int_{x_0}^{x_1} dx \int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} dy \int_{f_0(x,y)}^{f_1(x,y)} F(x, y, z)\,dz.$$

Des expressions, comme (5) et (6), *où le produit de trois différentielles, dx, dy, dz, multiplié par une fonction* $F(x, y, z)$ *des variables correspondantes, se trouve intégré successivement par rapport à chacune de ces variables et entre des limites dépendant généralement des variables par rapport auxquelles on n'a pas encore intégré, s'appellent des intégrales triples.* Le *champ* de l'intégrale, ou intervalle des limites dans lequel se meuvent les variables, est représenté, comme on voit, par un volume, et l'ensemble des limites se trouve lui-même représenté par la surface entourant ce volume.

303. — Des intégrales multiples en général et de leur utilité.

On conçoit qu'il puisse y avoir, de même, des intégrales *quadruples, quintuples,* etc., bref d'un *ordre de multiplicité* quelconque, suivant le nombre des différentielles de variables indépendantes, facteurs infiniment petits, qui multiplieront, dans leur *élément,* une fonction donnée de ces variables et, par suite, suivant le nombre des intégrations à faire pour obtenir un total fini. Car chaque intégration, effectuée par rapport à l'une des variables et entre des limites ou constantes, ou dépendant des variables qui subsistent encore dans l'expression, aura pour effet d'éliminer du résultat cette variable avec sa différentielle.

Par exemple, dans une question où il s'agira d'évaluer des rapports physiques, ou des actions d'une certaine nature, existant entre les diverses parties d'un corps et celles d'un autre corps, pour obtenir leur influence mutuelle totale (comme serait la pesanteur réciproque de chacun vers l'autre), chaque partie élémentaire $dx\,dy\,dz$ de l'un d'eux, définie en position par ses coordonnées x, y, z, et chaque fragment analogue $d\xi\,d\eta\,d\zeta$ de l'autre, caractérisé de même par ses coordonnées, que j'appellerai ξ, η, ζ, pourront avoir leur relation ou influence particulière exprimée par le produit de leurs masses, proportionnelles à leurs volumes dans les situations qu'ils occupent, et d'une fonction de ces situations respectives (x, y, z), (ξ, η, ζ). L'action élémentaire à considérer sera ainsi de la forme

$$F(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)\,dx\,dy\,dz\,d\xi\,d\eta\,d\zeta;$$

et, par suite, la somme à obtenir constituera une intégrale *sextuple*

$$\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int F(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)\,dx\,dy\,dz\,d\xi\,d\eta\,d\zeta,$$

dont les limites se détermineront d'après celles mêmes des deux corps.

Un second exemple, où l'on est conduit à des intégrales quadruples,

est le calcul de la valeur moyenne générale d'une fonction de point, $F(x, y, z, t)$, variable d'un instant à l'autre, et considérée en des temps t pouvant être différents pour différentes parties de l'espace ou, ce qui revient au même, dans des régions (x, y, z) dont les limites peuvent changer en fonction du temps t. Un tel calcul implique une division préalable, en éléments égaux, non seulement de l'espace, que je supposerai partagé en parallélépipèdes infiniment petits pareils $dx\,dy\,dz$, mais encore du temps t, dont j'appellerai dt les parties égales. Et il implique de plus que, pour chaque subdivision ainsi obtenue de l'espace et du temps, censée caractérisée ou définie par les plus petites valeurs qu'y reçoivent x, y, z, t, l'on considère et fasse entrer dans l'évaluation de la moyenne une valeur $F(x, y, z, t)$ de la fonction. Si l'on a soin d'écrire cette valeur $\frac{1}{\varepsilon}F(x, y, z, t)\,dx\,dy\,dz\,dt$, où ε désigne, pour abréger, le produit constant $dx\,dy\,dz\,dt$, la sommation de toutes les valeurs analogues donnera, au facteur commun près $\frac{1}{\varepsilon}$, l'intégrale quadruple $\iiiint F(x, y, z, t)\,dx\,dy\,dz\,dt$, dans laquelle les limites des intégrations dépendront évidemment de celles d'espace et de temps que l'on se donnera dans chaque cas. Enfin, pour avoir la valeur moyenne de F, il suffira de diviser cette somme par le nombre de ses parties, nombre qui est évidemment ce que serait la somme elle-même dans l'hypothèse $F = 1$, et qu'exprime, par suite, sauf encore le facteur $\frac{1}{\varepsilon}$, l'intégrale $\iiiint dx\,dy\,dz\,dt$, prise entre les mêmes limites données. Il viendra donc, comme valeur moyenne cherchée, le rapport des deux intégrales quadruples $\iiiint F(x, y, z, t)\,dx\,dy\,dz\,dt$ et $\iiiint dx\,dy\,dz\,dt$. La seconde se réduit d'ailleurs immédiatement à une intégrale triple; car l'on aura, par exemple, entre les deux limites à considérer $t = t_0$, $t = t_1$, données, pour chaque élément de volume $dx\,dy\,dz$, en fonction de ses coordonnées x, y, z,

$$\int_{t=t_0}^{t=t_1} dx\,dy\,dz\,dt = dx\,dy\,dz \int_{t_0}^{t_1} dt = (t_1 - t_0)\,dx\,dy\,dz,$$

expression ne restant plus à intégrer qu'en x, y et z.

Mais résumons-nous, pour les cas plus usuels où le degré de multiplicité des intégrales ne dépasse pas le troisième.

D'après ce qui précède, tout problème de sommation concernant une étendue à trois dimensions (volume et masse d'un corps, valeur moyenne d'une fonction de trois coordonnées aux divers points d'un solide, etc.) dépend généralement d'une intégrale triple. La raison en

est que l'élément *naturel* d'une telle étendue se trouve exprimé par un produit de trois facteurs infiniment petits, vu qu'il doit être infiniment petit dans les trois sens pour que tous ses points occupent presque la même position (x, y, z) et que les circonstances à considérer y soient, par suite, à fort peu près identiques, ou exprimées par une même valeur $F(x, y, z)$ de la fonction qui les représente sous l'unité de volume. De même, toute question analogue concernant une surface (aire et masse d'une couche mince de matière, valeur moyenne d'une fonction aux divers points d'une étendue superficielle, etc.) dépend généralement d'une intégrale double; car l'élément d'aire naturel est une surface ayant ses deux dimensions infiniment petites. S'il s'agit, par exemple, d'une aire plane rapportée à des axes rectangulaires des x et des y, les éléments naturels seront les rectangles $dx\,dy$ découpés par les deux systèmes de droites $x =$ const., $y =$ const.

Les lignes sont donc les seules figures qui, par l'addition de quantités concernant leurs diverses parties, ne donnent lieu qu'à des intégrales *simples;* car ce sont les seules dont l'élément naturel, savoir, un arc infiniment petit ds, ne s'étende que suivant un sens et ne contienne par suite, dans son expression, qu'un seul facteur infiniment petit.

306. — Interversion possible de l'ordre des intégrations, dans une intégrale multiple.

Une intégrale multiple conserve évidemment sa valeur quel que soit l'ordre dans lequel on y groupe les éléments, pourvu que ceux-ci restent au fond les mêmes quand on fait varier la manière de les ajouter, c'est-à-dire pourvu que la fonction sous les signes $\int$ et les limites entre lesquelles se meuvent les variables soient bien définies.

Donc, *à condition de ne pas modifier le champ,* on pourra changer l'ordre des intégrations et, s'il s'agit, par exemple, d'une intégrale double de la forme $\int_{x_0}^{x_1} dx \int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} f(x, y)\,dy$, avec $f(x, y)$ constamment fini, effectuer en premier lieu l'intégration par rapport à x, au lieu de l'intégration par rapport à y; ce qui, en se reportant à la figure précédente (p. 138), reviendra à grouper ensemble les éléments $f(x, y)\,dx\,dy$ pour lesquels y et dy seront les mêmes, savoir, les filets prismatiques, de hauteur $f(x, y)$, se projetant, sur le plan des xy, entre deux perpendiculaires consécutives à l'axe des y, comme KK_1 et $K'K'_1$. On voit que les éléments dont il s'agit seront bien ceux

de l'intégrale proposée, si l'on fait varier x entre les valeurs KK_0, KK_1, qui égalent deux certaines fonctions de $OK = y$, plus ou moins aisées à obtenir en résolvant l'équation du contour par rapport à x et non par rapport à y. Par conséquent, ces nouvelles limites, destinées à fixer l'étendue dans laquelle x varie pour chaque valeur de y, pourront toujours se déduire de celles, $y_1 = \varphi_1(x)$ et $y_0 = \varphi_0(x)$, qui définissaient l'étendue où variait y pour chaque valeur de x, et qui déterminaient ainsi complètement le *contour limite* $A'P_0B'P_1A'$. L'intégration par rapport à x une fois effectuée, ou, autrement dit, les filets prismatiques du volume à évaluer une fois groupés en tranches minces normales à l'axe des y, il ne restera plus qu'à faire la somme de toutes ces tranches, en intégrant, par rapport à y, entre deux limites constantes; et celles-ci se déduiront encore de la connaissance du contour limite, car elles seront la plus petite et la plus grande des valeurs reçues par y sur tout ce contour.

Ainsi, l'*on peut toujours intervertir l'ordre des intégrations, pourvu qu'on évalue convenablement, dans chaque cas, leurs limites respectives.*

Mais, si les limites étaient constantes, si, par exemple, dans $\int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} f(x,y)\,dy$, les deux expressions $y_0 = \varphi_0(x)$, $y_1 = \varphi_1(x)$ devenaient indépendantes de x, ou que les deux portions $A'P_0B'$, $A'P_1B'$ du contour fussent remplacées par deux parallèles à l'axe des x et reliées l'une à l'autre par les parties des ordonnées $\alpha A'$, $\beta B'$ qu'elles intercepteraient, il est évident que, pour toute valeur OK de y, les deux valeurs limites, KK_0 et KK_1, de x, égaleraient $O\alpha$ et $O\beta$, ou x_0 et x_1, quantités constantes; et y varierait ensuite entre les deux valeurs extrêmes y_0, y_1, également constantes. On aurait donc

$$(7) \qquad \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} f(x,y)\,dy = \int_{y_0}^{y_1} dy \int_{x_0}^{x_1} f(x,y)\,dx.$$

Par conséquent, *lorsqu'une intégrale multiple est prise entre des limites toutes constantes, on peut y intervertir à volonté l'ordre des intégrations sans modifier aucunement les limites de celle qui s'y fait par rapport à chaque variable.*

307*. — Exemple simple d'une telle interversion, dans un cas où les limites sont variables.

(Compléments, p. 80*.)

308*. — Intégrale quadruple réduite à une intégrale triple par l'interversion des intégrations; sommation d'actions ou d'influences exercées aux distances imperceptibles dans un corps, à travers une petite surface plane.

(Compléments, p. 81*.)

309. — Du centre de gravité des figures.

La détermination du centre de gravité des corps est l'un des problèmes les plus intéressants où s'emploient les intégrales multiples. Or, bien que cette question relève surtout de la Mécanique, il y a lieu d'en dire quelques mots dans un Cours d'Analyse, parce que la notion de centre de gravité ne s'applique pas seulement aux masses, mais encore aux simples figures géométriques, pour lesquelles elle conduit, comme on verra, à de remarquables théorèmes.

On appelle *centre de gravité* d'un corps le point dont chaque coordonnée, relative à un système quelconque d'axes rectilignes, est la moyenne arithmétique des coordonnées analogues prises pour les éléments d'égale masse, infiniment petits en tous sens, auxquels on peut toujours supposer le corps réduit. En d'autres termes, si M est la masse totale du corps, composée d'un nombre fini ou infini, n, de masses égales m n'occupant, chacune, qu'un espace infiniment restreint ou d'une situation définissable par les coordonnées x, y, z d'un quelconque de ses points, le centre de gravité, que j'appellerai G, sera le point dont les coordonnées X, Y, Z auront les valeurs

$$X = \frac{1}{n}\Sigma x = \frac{\Sigma mx}{M}, \qquad Y = \frac{1}{n}\Sigma y = \frac{\Sigma my}{M}, \qquad Z = \frac{1}{n}\Sigma z = \frac{\Sigma mz}{M},$$

le signe de sommation Σ s'étendant à tous les éléments m de la masse M.

Conformément à la définition donnée, ce point reste bien le même quand on change à volonté les axes. Si, en effet, x_1, y_1, z_1 et X_1, Y_1, Z_1 désignent respectivement les coordonnées, par rapport à un second système d'axes, de l'élément quelconque m et du point G, dont les coordonnées dans le premier système sont, de même, x, y, z et X, Y, Z, toutes ces coordonnées nouvelles s'exprimeront, comme on sait, en fonction des anciennes, au moyen de relations linéaires, de la forme

$$(16) \qquad X_1 = \alpha + aX + bY + cZ, \qquad x_1 = \alpha + ax + by + cz.$$

Remplaçons, dans la première de celles-ci, X, Y, Z par leurs valeurs $\frac{\Sigma(x, y, z)}{n}$ et α par l'expression équivalente $\frac{\Sigma\alpha}{n}$, où $\Sigma\alpha$ désigne la

somme de n termes égaux à α. Il viendra aisément

$$X_1 = \frac{1}{n}\Sigma(\alpha + ax + by + cz), \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad X_1 = \frac{1}{n}\Sigma x_1,$$

d'après la seconde (16). Et l'on trouverait de même $Y_1 = \frac{1}{n}\Sigma y_1$, $Z_1 = \frac{1}{n}\Sigma z_1$. Donc, ce n'est pas seulement par rapport au premier système d'axes que le point G a pour coordonnées les valeurs moyennes des coordonnées de même nom des diverses masses élémentaires m, mais bien avec tout système d'axes rectilignes.

Si l'on suppose continue la matière M du corps et que, par suite, ses éléments m soient non pas de simples points, mais des particules dM remplissant des espaces infiniment petits en tous sens, les sommes Σmx, Σmy, Σmz, dont dépendent les expressions $\frac{1}{M}\Sigma m(x, y, z)$ de X, Y, Z, constitueront des intégrales définies, évaluables par une division arbitraire du corps en volumes élémentaires, au moyen, par exemple, des trois systèmes de plans $x =$ const., $y =$ const., $z =$ const., ou de trois autres familles quelconques de surfaces. On le reconnaît en raisonnant comme il a été déjà fait (p. 143) pour l'évaluation de la masse d'un corps dont on donne la densité à chaque endroit, c'est-à-dire en observant que, dans tous les modes possibles de division, les mêmes masses élémentaires, considérées comme produits des éléments de volume, ou de leurs fragments, par la densité en un de leurs points ou auprès, se retrouveront toutes, abstraction faite d'écarts relatifs infiniment petits, et seront d'ailleurs multipliées, dans Σmx, Σmy, Σmz, par des coordonnées x, y ou z également incapables de varier, pour chaque fragment, dans un rapport tant soit peu sensible.

Ainsi, de quelque manière que se fasse la division de la matière M en éléments de dimensions infiniment petites, dont dM désignera la masse approchée, produit de l'étendue qu'occupera chacun par la densité en un de ses points, on aura, pour calculer les coordonnées X, Y, Z du centre de gravité, les trois formules

$$(17) \qquad X = \frac{1}{M}\int_M x\,dM, \qquad Y = \frac{1}{M}\int_M y\,dM, \qquad Z = \frac{1}{M}\int_M z\,dM,$$

où le signe $\int$, affecté à sa partie inférieure de l'indice M, indique des intégrations à faire dans toute l'étendue qu'occupe la masse M, et où les facteurs x, y, z de dM, sous ce signe $\int$, désignent les coordonnées d'un point pris à volonté sur l'élément quelconque de cette étendue

auquel correspond la masse dM. Dans le cas ordinaire d'une matière M remplissant un espace à trois dimensions, on décomposera donc celui-ci en parallélépipèdes élémentaires, et $\int_M (x, y, z) dM$ deviendront trois intégrales triples. Si, au contraire, la matière se trouve soit étalée en couche mince sur une surface σ, soit même disposée en filet étroit le long d'une ligne s, ces limites de sommes se réduiront évidemment à des intégrales ou doubles, ou même simples, dont l'élément sera le produit d'un élément $d\sigma$ ou ds d'aire ou d'arc par l'une de ses coordonnées x, y, z, et par la densité *superficielle* ou *linéaire* de sa matière, c'est-à-dire par sa masse rapportée non plus à l'unité de volume, mais à l'unité de surface ou de longueur.

On ramène, sans erreur sensible, à de telles intégrales les sommes $\Sigma m(x, y, z)$, tout comme l'expression Σm de la masse totale M, quand cette masse n'est plus continue, mais répartie entre un nombre très grand de *points matériels* distincts, d'une étendue nulle (ou négligeable) et situés à des distances imperceptibles les uns des autres, comme une observation attentive conduit à l'admettre pour tous les corps. En effet, il suffit alors de concevoir la masse de chaque groupe moléculaire d'atomes ou points matériels, étalée uniformément dans l'espace où elle se trouve disséminée et dans le vide environnant, jusqu'à moitié chemin des groupes voisins, pour rendre fictivement continue la matière du corps proposé, sans changer dans un rapport physiquement appréciable les coordonnées x, y, z d'aucune de ses parties ni, par suite, leurs valeurs moyennes X, Y, Z.

Cela posé, lorsque le corps dont il s'agit est *homogène*, c'est-à-dire d'une densité (*cubique, superficielle* ou *linéaire*) constante, son centre de gravité devient ce que l'on appelle le *centre de gravité* de sa *figure* même. Alors des éléments de masse égaux correspondent à des éléments de volume, de surface ou de longueur égaux aussi; et l'on peut évidemment se dispenser de tenir compte de la densité dans le calcul des coordonnées moyennes X, Y, Z. Ainsi, *le centre de gravité d'une figure est le point qui a chacune de ses coordonnées égale à la moyenne des coordonnées de même nom de tous les éléments, pris équivalents et infiniment petits en tous sens, dont se compose cette figure.*

Sans insister davantage ici sur la détermination des centres de gravité, nous observerons que, dans toute figure *finie* qui possède un *centre,* c'est-à-dire dont les éléments sont disposés symétriquement de part et d'autre d'un même point, ce point, centre de la *figure,* en est aussi le *centre de gravité.* On sait, en effet, que, lorsqu'on décrit

le long d'une même droite, successivement, deux chemins égaux, les deux changements correspondants éprouvés par chaque coordonnée sont égaux aussi. Donc, si l'on considère le centre d'une figure, et deux éléments symétriques de cette figure, situés de part et d'autre, les coordonnées varient juste autant, quand on passe de l'un de ces éléments au centre, que lorsqu'on passe du centre à l'autre élément, de même valeur que le premier : ce qui revient à dire que les coordonnées du centre sont les moyennes respectives de celles des deux éléments. Comme il en est de même pour tous les couples analogues d'éléments composant la figure, les coordonnées de son centre égalent bien les moyennes générales de celles de toutes ses parties, et ce point est le centre de gravité.

310. — Volume et surface latérale d'un tronc de prisme droit.

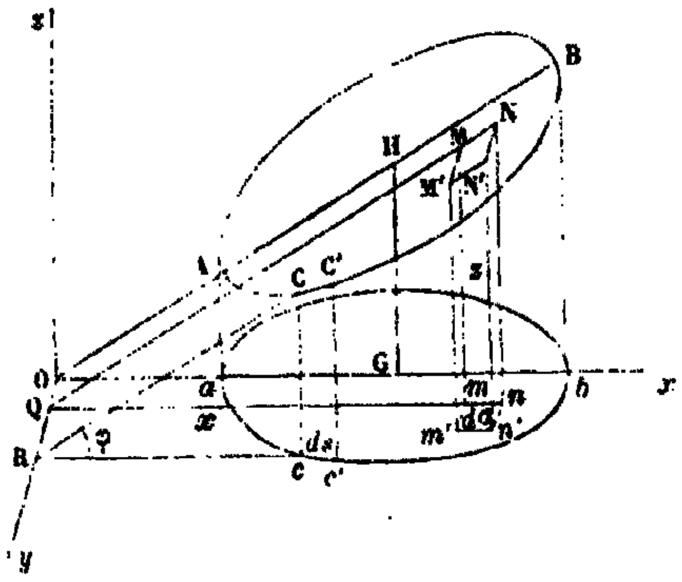
Imaginons un prisme droit, dont la base ait pour contour la ligne fermée quelconque $acc'ba$; et supposons qu'on le coupe, par un plan BOy, suivant une section oblique quelconque $ACC'BA$; alors sa partie comprise entre la base ab et cette section AB est ce que l'on appelle un *tronc de prisme droit*. Nous nous proposons de former une expression simple de son volume et de sa surface latérale.

A cet effet, prenons un système d'axes rectangles Ox, Oy, Oz, tels, que le second, Oy, soit l'intersection des deux plans acb, ACB, et que le premier Ox se trouve contenu dans celui de la base acb : ce sera, par exemple, la perpendiculaire à Oy qui aboutit au centre de gravité G de cette base. Enfin, supposons le troisième axe, Oz, tiré, parallèlement aux génératrices aA, bB, cC, du côté où est le tronc de prisme. Observons que, si l'on considère une ordonnée quelconque, $mM = z$, de la base supérieure ACB du tronc, et son abscisse $Qm = x$, dans le plan MmQ parallèle aux zx ou normal à l'arête Oy de l'angle dièdre des deux bases, ces deux coordonnées z et x seront les deux côtés de l'angle droit du triangle rectangle MmQ, dont l'angle Q mesurera le dièdre en question, que nous appellerons φ; de sorte qu'on aura $z = x \tan\varphi$.

Cela posé, pour évaluer le volume du tronc, décomposons-le, d'après la méthode générale que nous avons donnée, en filets élémentaires, comme $mnn'm'M'N'NM$, ayant pour bases les divers éléments, $mnn'm' = d\sigma$, de l'aire acb, que j'appellerai σ, et ayant pour hauteurs les ordonnées z de la base supérieure ACB qui correspondent aux coordonnées x, y des éléments considérés $d\sigma$ du plan des xy. Le volume d'un filet élémentaire sera donc $z\,d\sigma$, ou $(\tan\varphi)x\,d\sigma$, vu que

$z = x$ tangφ. Par suite, le volume total égalera la somme de tous les produits pareils, $(\text{tang}\varphi)\int_\sigma x\,d\sigma$, où $\int_\sigma$ désigne une intégrale étendue à toute la surface σ de la base *acb*. Or, si nous introduisons l'abscisse OG du centre de gravité de cette surface, c'est-à-dire, par définition,

Fig. 58.



la moyenne des abscisses x de tous les éléments $d\sigma$ de l'aire *acb*, nous aurons $\text{OG} = \frac{1}{\sigma}\int_\sigma x\,d\sigma$, ou bien $\int_\sigma x\,d\sigma = \sigma \times \text{OG}$; et l'expression du volume deviendra $\sigma \times \text{OG}.\text{tang}\varphi$. Mais le produit OG.tangφ n'est évidemment autre que la hauteur GH du tronc, mesurée, perpendiculairement à la base, au-dessus du point G. Donc, en appelant h cette hauteur, le volume du tronc sera simplement exprimé par σh. Ainsi, *le volume du tronc de prisme droit égale le produit de sa base par sa hauteur, mesurée perpendiculairement au-dessus du centre de gravité de cette base.*

Quant à la surface latérale, il est évident que, si ds désigne un élément quelconque, cc', du contour *acba*, on pourra prendre pour élément de cette surface la bande $cc'\text{C}'\text{C}$, comprise entre les deux génératrices $c\text{C}$, $c'\text{C}'$ issues des deux extrémités de ds, et que cette bande, de largeur $cc' = ds$, aura comme expression, sauf erreur négligeable, $c\text{C} \times cc'$ ou $(\text{tang}\varphi)x\,ds$, en appelant x l'abscisse de l'élément ds. L'aire totale vaudra donc $(\text{tang}\varphi)\int_s x\,ds$, si $\int_s$ désigne une intégrale étendue à tout le contour $acba = s$. Or considérons, dans le plan de la base *acb*, le centre de gravité de ce contour, centre différant généralement de celui de la surface *acb*, mais que nous représenterons encore par G pour ne pas compliquer la figure. Son abscisse OG sera,

par définition, la valeur moyenne, $\frac{1}{s}\int_s x\,ds$, de x sur tout le contour s, et l'expression $(\tang\varphi)\int_s x\,ds$ pourra être remplacée par $s \times \mathrm{OG}.\tang\varphi = s \times \mathrm{GH}$. Si donc on appelle h' la hauteur du tronc mesurée au-dessus du centre de gravité du contour de la base, il viendra, pour la valeur de la surface latérale, sh'.

En résumé, *le volume et la surface latérale du tronc de prisme droit s'obtiennent en multipliant respectivement ou sa base, ou le contour de sa base, par la hauteur correspondante du tronc, mesurée perpendiculairement au-dessus du centre de gravité soit de cette base, soit de ce contour.*

311. — Théorèmes de Guldin ou de Pappus.

Imaginons actuellement que l'angle φ des deux bases devienne infiniment petit. Alors les ordonnées z, telles que mM, ne présenteront que des différences et des écarts infiniment petits du second ordre d'avec les chemins que décriraient les divers points de la figure *acb*, si on la faisait tourner de l'angle φ autour de Oy pour l'amener dans le plan ACB; car l'ordonnée mM, située dans le plan mQM de l'arc de cercle, perpendiculaire à Oy, qu'un pareil mouvement ferait parcourir au point m, et d'ailleurs normale au rayon Qm de cet arc, est tangente à ce dernier, dont l'extrémité, sur le plan ACB, ne se trouve, par suite, qu'à une distance de M infiniment petite du second ordre. Il résulte évidemment de là que le volume ou l'aire engendrés par chaque élément de la surface *acb* ou de son contour ne pourront pas différer, d'une manière appréciable, du volume et de la surface ayant ces éléments comme base dans le tronc de prisme, et que, par suite, le volume total et l'aire totale décrits seront également les produits respectifs de la surface *acb*, ou de son contour, par le chemin infiniment petit, sensiblement égal, dans chaque cas, à GH, qu'aura parcouru le centre de gravité de cette surface ou de ce contour.

Et si, après cette rotation infiniment petite de la figure *acb*, il en survient une seconde, soit autour du même axe Oy, soit autour d'un autre axe situé dans le plan ACB de sa nouvelle position, l'aire et le volume décrits pendant ce second mouvement égaleront encore les produits respectifs des multiplicandes employés déjà, contour ou surface, par le nouveau chemin qu'aura parcouru le centre de gravité considéré. En continuant de même pour une infinité de rotations suc-

cessives, puis faisant la somme des aires ou des volumes qui naissent de ces déplacements, il est clair que l'on obtiendra un théorème ainsi conçu :

Toute figure plane (ligne ou surface), qui se meut en tournant autour d'un axe ou d'axes situés à chaque instant dans son plan, décrit une autre figure (surface ou volume) égale au produit de la figure génératrice par le chemin que parcourt son centre de gravité.

Notre raisonnement suppose les axes de rotation, extérieurs à la figure génératrice dont on considère le centre de gravité. Quand il n'en est pas ainsi, mais que l'axe de rotation coupe la ligne ou surface génératrice, la partie de celle-ci située au delà de l'axe par rapport au centre de gravité, décrit à fort peu près, dans chaque rotation élémentaire, le volume ou la surface latérale d'un prisme tronqué dont les abscisses x et les ordonnées z, sur la figure de la page 153, sont négatives, ou tracées dans l'angle dièdre opposé par l'arête à $xOyB$. Ces coordonnées x et z se prennent, par suite, négativement, tant dans l'équation $z = x \operatorname{tang}\varphi$ et dans la formule qui relie les abscisses x à celle du centre de gravité considéré G, que dans l'expression analytique $zd\sigma$ ou zds des éléments d'espace (aires ou volumes) décrits. Donc le même énoncé subsiste, mais à la condition d'y compter soustractivement, c'est-à-dire négativement, les parties de la figure engendrée qui proviennent des parties de la figure génératrice non comprises du même côté de l'axe que son centre de gravité général.

Cette belle proposition est ordinairement appelée *théorème de Guldin*, du nom du P. jésuite qui l'a exposée vers le commencement du XVII^e siècle; mais elle avait été découverte dès l'antiquité, car le géomètre grec Pappus, d'Alexandrie, savait, au IV^e siècle de notre ère, l'utiliser dans le calcul des volumes. On s'en sert, tantôt pour obtenir l'expression d'un volume ou d'une surface de révolution, quand on connaît, dans la figure génératrice, la position du centre de gravité, et tantôt, au contraire, ponr déterminer cette position, quand l'expression de la figure engendrée se trouve connue.

312. — Surface et volume du tore ou anneau.

Contentons-nous ici d'en déduire la surface et le volume du *tore*. On appelle ainsi le corps, en forme d'anneau, que décrit un cercle, d'un rayon donné r, en tournant autour d'un axe pris dans son plan, mais extérieur, ou passant à une distance R du centre plus grande

que le rayon r : c'est donc une surface de révolution qui a des cercles non seulement pour parallèles, mais aussi pour méridiens.

Le centre du cercle générateur y est évidemment, tout à la fois, le centre de gravité de sa surface πr^2 et celui de son contour $2\pi r$. D'ailleurs, le chemin qu'il décrit dans une rotation complète est une circonférence ayant pour rayon la distance R de ce centre du cercle générateur à l'axe ou au centre du tore : il a donc pour valeur $2\pi R$. Le volume et la surface du tore égaleront, en conséquence, les deux produits respectifs de πr^2 et de $2\pi r$ par $2\pi R$; ce qui leur donne pour formules $2\pi^2 r^2 R$ et $4\pi^2 r R$.

Il résulte d'une explication précédente (p. 155) que, si l'axe de rotation coupait le cercle générateur, ou si l'on avait $R < r$, les mêmes expressions $2\pi^2 r^2 R$ et $4\pi^2 r R$ conviendraient encore, mais en y comptant négativement le volume ou l'aire qui proviendraient du plus petit des deux segments ou des deux arcs du cercle générateur limités par l'axe.

VINGT-NEUVIÈME LEÇON.

RÉDUCTION ET TRANSFORMATION DES INTÉGRALES MULTIPLES; ÉVALUATION APPROXIMATIVE, PAR CES INTÉGRALES, DES RESTES DE CERTAINES SÉRIES; ETC.

313*. — **Réduction des intégrales prises dans tout l'intérieur d'une surface ou d'un volume à d'autres ne se rapportant qu'aux limites de ces étendues, quand une des intégrations s'y effectue immédiatement.**

(Compléments, p. 89*.)

314*. — **De la transformation des intégrales multiples : méthode analytique, exposée sur un exemple, et interprétée géométriquement.**

(Compléments, p. 93*.)

315*. — **Même transformation, opérée d'une manière purement géométrique, quand le champ d'intégration est figurable par une surface ou un volume; exemples.**

(Compléments, p. 98*.)

316*. — **Calcul approché des restes de séries doubles, triples, etc., par des intégrales d'un pareil ordre de multiplicité.**

(Compléments, p. 102*.)

TRENTIÈME LEÇON.

ÉTUDE DIRECTE DES INTÉGRALES DÉFINIES ET PROCÉDÉS SPÉCIAUX DE CALCUL POUR CERTAINES D'ENTRE ELLES.

317. — Différentiation d'une intégrale définie.

Nous n'avons, jusqu'ici, évalué les intégrales définies qu'en supposant connues les intégrales indéfinies ou fonctions primitives dont elles expriment les accroissements dans certains intervalles. Or le sens précis qu'elles offrent, comme sommes d'éléments infiniment petits *d'une forme donnée* $f(x,y,\ldots)\,dx\,dy\ldots$ occupant ensemble un *champ d'intégration donné,* permet évidemment de s'en faire, avant tout calcul, une idée nette, suffisante pour leur découvrir des propriétés diverses; et l'on conçoit que celles-ci puissent quelquefois conduire jusqu'à l'évaluation complète des intégrales sans passer par les fonctions primitives. La Leçon actuelle aura justement pour objet une exposition succincte des principaux procédés servant à cet effet.

Il est clair, par exemple, que, si la fonction f placée sous les signes $\int\int$, et y multipliant le produit $dx\,dy\ldots$ des différentielles des variables $x, y, \ldots$ d'intégration, dépend non seulement de ces variables, mais encore d'un paramètre c, l'intégrale, elle aussi, dépendra généralement, comme tous ses éléments $f(x,y,\ldots)\,dx\,dy\ldots$, du paramètre c. Or faisons croître ce paramètre d'une très petite quantité Δc, mais admettons d'abord que le champ de l'intégrale, déterminé par ses limites, reste le même; ce qui permettra de conserver à tous les éléments, sans en introduire ni en abandonner aucun, leur champ primitif, tant sous le rapport de *l'étendue* $dx\,dy\ldots$ que sous celui de la *situation,* définie par les valeurs correspondantes de $x, y, \ldots$.

Chaque élément $f(x,y,\ldots,c)\,dx\,dy\ldots$ croîtra, sauf erreur relative négligeable, de $\left[\frac{df(x,y,\ldots,c)}{dc}\Delta c\right]dx\,dy\ldots$, et, vu la constance du facteur Δc pour tous les éléments, l'accroissement de leur somme sera, de même, c'est-à-dire avec une erreur relative analogue, $(\Delta c)\int\int\ldots\frac{df(x,y,\ldots,c)}{dc}\,dx\,dy\ldots$, expression où les intégrations

indiquées $\int\int\ldots$ auront évidemment les mêmes limites que dans l'intégrale proposée. Divisons cet accroissement de l'intégrale par celui, Δc, de la variable indépendante corrélative c, puis faisons tendre Δc vers zéro, et il viendra, pour la dérivée de l'intégrale par rapport à c, l'expression $\int\int\ldots\frac{df(x,y,\ldots,c)}{dc}\,dx\,dy\ldots$ D'où ce théorème, connu déjà de Leibnitz, que *la dérivée, par rapport à un paramètre, de toute intégrale définie à champ invariable, mais où la fonction sous les signes $\int$ (supposée d'ailleurs finie et continue) dépend de ce paramètre, s'obtient par une différentiation sous les signes $\int$, c'est-à-dire en y substituant simplement à la fonction sa dérivée relative au paramètre dont il s'agit.* Ainsi la dérivée de l'intégrale s'exprimera, sans qu'on ait aucune intégration préalable à effectuer, au moyen d'une nouvelle intégrale.

Mais supposons maintenant les limites de l'intégrale proposée variables en même temps que la fonction f placée sous les signes $\int$. Alors on pourra, soit garder les éléments $f(x,y,\ldots,c)\,dx\,dy\ldots$ toujours en même nombre, en faisant varier convenablement la situation $(x,y,\ldots)$ et la grandeur $dx\,dy\ldots$ de leurs champs respectifs, soit, au contraire, ce qui est généralement préférable, laisser aux divers éléments $f(x,y,\ldots,c)\,dx\,dy\ldots$ un champ invariable, ou y faire changer uniquement c, mais, alors, ajouter des éléments nouveaux dans toute l'étendue, contiguë à certaines limites, gagnée d'un instant à l'autre par le champ de l'intégrale, et supprimer d'autre part ceux dont le champ, contigu à d'autres limites, est perdu ou abandonné par elle. Un changement infiniment petit de l'intégrale se composera donc d'une première partie, dite *entre les limites,* donnée par la différentiation sous les signes $\int$, et à laquelle il se réduirait si les limites restaient les mêmes, plus une seconde partie, dite *aux limites,* formée par l'excédent des éléments *gagnés* sur les éléments *perdus*, ou provenant du déplacement infiniment petit des limites du champ.

Pour avoir plus de précision relativement à cette dernière partie, bornons-nous au cas d'une intégrale simple, que nous écrirons $\int_a^b f(x,c)\,dx$. Faisons-y varier c de dc, a de da et b de db, en sorte qu'elle devienne $\int_{a+da}^{b+db} f(x,c+dc)\,dx$. Le nouveau champ, s'étendant depuis $x=a+da$ jusqu'à $x=b+db$, a évidemment gagné db du côté de la limite supérieure et perdu da du côté de la limite inférieure. Comme la fonction sous le signe $\int$ diffère infiniment peu de $f(b,c)$ près de la première de ces limites et de $f(a,c)$ près de la seconde,

l'élément gagné sera $f(b,c)\,db$, l'élément perdu, $f(a,c)\,da$, et l'excédent de l'un sur l'autre, à joindre à l'accroissement $(dc)\int_a^b \frac{df(x,c)}{dc}dx$ calculé dans l'hypothèse de limites invariables, donnera, en somme, comme *différentielle totale* de l'intégrale définie,

$$(1)\qquad d\int_a^b f(x,c)\,dx = f(b,c)\,db - f(a,c)\,da + dc\int_a^b \frac{df(x,c)}{dc}\,dx.$$

On le voit encore en faisant, dans $\int_{a+da}^{b+db} f(x, c+dc)\,dx$, varier x, d'abord, de la limite inférieure $a+da$ à a, puis de a à b et, enfin, de b à la limite supérieure $b+db$. Cette intégrale se trouve être ainsi la somme de trois autres, dont la première, $\int_{a+da}^{a} f(x, c+dc)\,dx$, peut évidemment être remplacée par $\int_{a+da}^{a} f(a,c)\,dx = -f(a,c)\,da$, dont la seconde, $\int_a^b f(x, c+dc)\,dx$, dépasse l'intégrale primitive $\int_a^b f(x,c)\,dx$, de $\int_a^b \left(\frac{df(x,c)}{dc}dc\right)dx = dc\int_a^b \frac{df(x,c)}{dc}\,dx$, et dont, enfin, la troisième, $\int_b^{b+db} f(x, c-dc)\,dx$, analogue à la première, est réductible à $\int_b^{b+db} f(b,c)\,dx = f(b,c)\,db$. Par suite, l'excédent $d\int_a^b f(x,c)\,dx$, sur $\int_a^b f(x,c)\,dx$, de la somme de ces trois intégrales, conduit bien à la formule (1).

Les deux termes du second membre de (1) relatifs aux limites, savoir $f(b,c)\,db$ et $-f(a,c)\,da$, peuvent d'ailleurs, en adoptant une notation qui nous est familière pour désigner la différence des deux valeurs d'une expression à deux limites, s'écrire ensemble $[f(x,c)\,dx]_{x=a}^{x=b}$, ou même, sous une forme plus condensée, $[f(x,c)\,dx]_a^b$. Ainsi, la formule (1) sera encore

$$(2)\qquad d\int_a^b f(x,c)\,dx = [f(x,c)\,dx]_a^b + dc\int_a^b \frac{df(x,c)}{dc}\,dx.$$

Imaginons que a et b, de même que tous les paramètres pouvant figurer dans $f(x,c)$, dépendent de c : nous obtiendrons la *dérivée complète* de l'intégrale en divisant par dc chaque terme du second

membre de (2) ou de (1). Il vient donc pour cette dérivée complète, si b' et a' désignent les dérivées de b et a par rapport à c,

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dc}\int_a^b f(x,c)\,dx &= \left[f(x,c)\frac{dx}{dc}\right]_a^b + \int_a^b \frac{df(x,c)}{dc}\,dx \\ &= f(b,c)b' - f(a,c)a' + \int_a^b \frac{df(x,c)}{dc}\,dx. \end{aligned} \right.$$

Dans le cas particulier où les limites a, b deviennent constantes, la dérivée de l'intégrale s'obtient bien, comme il était évident, par la simple différentiation de $f(x, c)$ sous le signe $\int$.

318. — **Évaluation de certaines intégrales définies, par la différentiation d'autres intégrales sous les signes $\int$.**

Supposons qu'on ait obtenu, soit par le procédé ordinaire, qui consiste à calculer d'abord l'intégrale indéfinie et à évaluer son accroissement entre les deux limites, soit par l'une quelconque des méthodes spéciales dont il sera bientôt question, la valeur d'intégrales définies de l'une des deux formes $\int_a^b f(x,c)\,dx$, $\int_a^x f(x,c)\,dx$, c'est-à-dire ayant ou leurs deux limites constantes ou une limite, x, variable, mais indépendante du paramètre c. Nous désignerons respectivement par $\varphi(c)$ et par $F(x, c)$ leurs valeurs, fonctions de c seulement dans le premier cas, de x et de c dans le second. Posant ainsi les égalités

$$(4)\qquad \int_a^b f(x,c)\,dx = \varphi(c), \qquad \int_a^x f(x,c)\,dx = F(x,c),$$

différentions les deux membres de chacune par rapport à c, et il viendra

$$(5)\qquad \int_a^b f'_c(x,c)\,dx = \varphi'(c), \qquad \int_a^x f'_c(x,c)\,dx = F'_c(x,c).$$

On aura donc, sans aucune intégration nouvelle, mais par la simple différentiation, en c, de $\varphi(c)$ ou de $F(x, c)$, les deux intégrales constituant les premiers membres de (5). La seconde possède, comme celle dont on l'a déduite, la même généralité qu'une intégrale indéfinie, à une constante arbitraire près, puisque la limite supérieure, x, y est variable. Quant à la première, prise entre des limites constantes, il arrivera souvent qu'elle se trouvera ainsi évaluée dans des cas où il serait impossible d'avoir sous forme finie la fonction primitive

$\int f'_c(x, c)\,dx$; car l'intégrale $\int_a^b f(x, c)\,dx$, d'où l'on est parti pour l'obtenir, peut avoir été calculée par l'un des procédés spéciaux que l'on verra ci-après et qui, applicables seulement pour certaines valeurs des limites, ne supposent pas que l'on connaisse ni même que l'on puisse connaître exactement l'intégrale indéfinie $\int f(x, c)\,dx$.

Bornons-nous, en ce moment, à deux exemples simples de la seconde catégorie, savoir, ceux auxquels conduisent les deux intégrales, immédiatement calculables,

$$(6)\qquad \int_0^x e^{-cx}\,dx = \frac{1-e^{-cx}}{c}, \qquad \int_0^x \frac{dx}{c+x^2} = \frac{1}{\sqrt{c}}\operatorname{arctang}\frac{x}{\sqrt{c}},$$

où nous supposerons c positif.

Comme on a, ici, $f(x, c) =$ soit e^{-cx}, soit $(c+x^2)^{-1}$, il vient, par un nombre quelconque n de différentiations successives en c,

$$\frac{d^n f(x, c)}{dc^n} = \text{soit } (-1)^n x^n e^{-cx}, \quad \text{soit } (-1)^n (1.2.3\ldots n)(c+x^2)^{-(n+1)}.$$

Donc les relations (6) différentiées n fois en c, puis divisées respectivement, la première par $(-1)^n$, la seconde par $(-1)^n(1.2.3\ldots n)$, donneront

$$(7)\ (\text{pour } n>0)\left\{\begin{aligned} &\int_0^x x^n e^{-cx}\,dx = (-1)^n \frac{d^n}{dc^n}\left(\frac{1-e^{-cx}}{c}\right),\\ &\int_0^x \frac{dx}{(c+x^2)^{n+1}} = \frac{(-1)^n}{1.2.3\ldots n}\,\frac{d^n}{dc^n}\left(\frac{1}{\sqrt{c}}\operatorname{arctang}\frac{x}{\sqrt{c}}\right).\end{aligned}\right.$$

Ainsi il ne restera, pour avoir sous forme finie $\int x^n e^{-x}dx$ et $\int (c+x^2)^{-(n+1)}dx$, qu'à effectuer dans les seconds membres, expressions les plus concises possibles de ces intégrales, les faciles quoique laborieuses différentiations, par rapport à c, qui s'y trouvent indiquées. Ces différentiations se simplifieront d'ailleurs beaucoup si la limite supérieure x devient infinie positive; car, alors, e^{-cx} s'annulant et $\operatorname{arctang}\frac{x}{\sqrt{c}}$ devenant $\frac{\pi}{2}$, les deux expressions à différentier n fois seront $\frac{1}{c}$ et $\frac{1}{\sqrt{c}}\frac{\pi}{2}$, ou c^{-1} et $\frac{\pi}{2}c^{-\frac{1}{2}}$, quantités ayant pour dérivées $n^{\text{ièmes}}$, respectivement,

$$(-1)^n(1.2.3\ldots n)c^{-(n+1)} \quad \text{et} \quad (-1)^n\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\,\frac{5}{2}\cdots\frac{2n-1}{2}\,c^{-\frac{2n+1}{2}}.$$

Il viendra donc

$$(8)\quad (\text{pour } n > 0)\left\{\begin{aligned} &\int_0^\infty x^n e^{-cx}\,dx = \frac{1.2.3\ldots n}{c^{n+1}},\\ &\int_0^\infty \frac{dx}{(c+x^2)^{n+1}} = \frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\,\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}\,\frac{\pi}{2c^n\sqrt{c}}.\end{aligned}\right.$$

319*. — Des difficultés que présente la différentiation de certaines intégrales définies.

(Compléments, p. 111*.)

320. — Intégration sous le signe $\int$: application au calcul de $\int_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin bx}{x}\,dx$.

Mais passons aux procédés qui permettent d'obtenir immédiatement certaines intégrales définies dans des cas où l'intégrale indéfinie correspondante n'est pas calculable sous forme finie. Les deux plus importants se rattachent à la théorie des intégrales doubles.

Je parlerai d'abord de celui qu'on a appelé *intégration sous le signe* $\int$. Il est basé sur la propriété qu'ont les intégrales multiples à limites *constantes* de conserver leur valeur quand on y intervertit l'ordre des intégrations, pourvu du moins qu'une certaine vue directe de l'ensemble des éléments, supposée dans la démonstration (p. 147), soit possible : circonstance exigeant un champ d'intégration bien déterminé et une fonction sous le signe $\int$ finie dans toute l'étendue de ce champ. On y considère, ordinairement, une intégrale double où les intégrations peuvent se faire complètement quand on les effectue dans un certain ordre, tandis qu'une seule des deux aboutit lorsqu'on change cet ordre. Il vient ainsi deux expressions égales, dont l'une est une intégrale définie simple, tandis que l'autre est sa valeur sous forme finie.

Prenons, par exemple, comme point de départ, l'intégrale, évaluée plus haut (p. 68) et où a désigne une quantité *positive* quelconque,

$$(14)\qquad \int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2}\quad (\text{pour } a > 0).$$

Le champ en sera bien circonscrit, conformément à l'hypothèse énoncée, si nous y supposons mentalement la limite supérieure ∞ remplacée, jusqu'à la fin des calculs, par une très grande quantité *fixe*, suffisante pour que le second membre de (14) exprime l'inté-

grale avec une erreur insensible, finalement évanouissante dans les résultats à obtenir. Cela posé, regardons b comme une variable et, après avoir multiplié par db les deux membres de (14), intégrons-les, par rapport à b, entre les deux limites *finies* o, b. Nous aurons

$$(15) \qquad \int_0^b db \int_0^\infty e^{-ax} \cos bx \, dx = \int_0^b \frac{a\,db}{a^2+b^2} = \left(\operatorname{arctang} \frac{b}{a}\right)_{b=0}^{b=b} = \operatorname{arctang} \frac{b}{a}.$$

On voit que les deux intégrations indiquées dans l'intégrale double $\int_0^b db \int_0^\infty e^{-ax} \cos b\,x\,dx$ ont pu se faire complètement en commençant par celle qui est relative à x. Or une seule s'effectue quand on change cet ordre; car, si l'on commence par l'intégration relative à b, il vient successivement

$$\int_0^\infty dx \int_0^b e^{-ax}(\cos xb)\,db = \int_0^\infty dx (e^{-ax}) \left(\frac{\sin xb}{x}\right)_{b=0}^{b=b} = \int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sin bx}{x}\,dx,$$

relation où le dernier membre n'est plus réductible par les méthodes connues. Ainsi l'intégration en b, seule, a pu se faire; et c'est justement parce qu'on l'a effectuée sur $e^{-ax} \cos b.x\,db$, c'est-à-dire (à part le facteur db), sur la fonction $e^{-ax} \cos b x$ placée primitivement sous le signe $\int_0^\infty$ d'intégration par rapport à x, que ce procédé prend le nom d'*intégration sous le signe* $\int$.

On aura donc, en égalant les deux expressions obtenues pour l'intégrale double,

$$(16) \qquad \int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sin bx}{x}\,dx = \operatorname{arctang} \frac{b}{a} \quad (\text{pour } a > 0);$$

et la différentielle $e^{-ax} \frac{\sin b x}{x}\,dx$ se trouvera intégrée entre les limites o et ∞, tandis qu'elle ne pourrait l'être, dans un autre intervalle, que sous une forme non finie, comme, par exemple, en série, au moyen du développement de $\sin b.x = b.x - \frac{b^3 x^3}{1.2.3} + \ldots$, suivi de l'emploi, pour les divers termes, de la première formule (7) [p. 162].

321*. — Calcul et propriétés de l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x}\,dx$.

(Compléments, p. 118*.)

322. — Intégration par décomposition d'une intégrale double en produits d'intégrales simples.

Le second procédé de calcul de certaines intégrales simples au moyen d'intégrales doubles consiste à décomposer une intégrale double, dont on puisse connaître d'autre part la valeur, en facteurs qui soient des intégrales simples, ou en plusieurs termes formés, chacun, de pareils facteurs. On obtient ainsi, entre ces facteurs, des relations finies, qui servent à les évaluer.

Considérons, par exemple, une intégrale double, de la forme $\int_a^b dx \int_m^n \varphi(x)\psi(y)dy$, c'est-à-dire dont les limites soient constantes et où la fonction sous les signes $\int$ égale le produit de deux facteurs ne contenant, chacun, qu'une seule des deux variables x, y. Le facteur $\varphi(x)$ sera invariable pendant l'intégration relative à y, qui donnera comme résultat $\varphi(x)\int_m^n \psi(y)dy$. Par suite, $\int_m^n \psi(y)dy$ étant désormais et à son tour, dans ce résultat, un certain facteur constant, on pourra, en intégrant par rapport à x, le faire sortir du signe $\int_a^b$; et l'on aura finalement

$$(18)\qquad \int_{x=a}^{x=b}\int_{y=m}^{y=n} \varphi(x)\psi(y)\,dx\,dy = \left[\int_a^b \varphi(x)\,dx\right]\left[\int_m^n \psi(y)\,dy\right].$$

Si donc on parvient, par une voie quelconque, à calculer l'intégrale double, la formule (18) sera une relation de forme finie entre les deux intégrales simples $\int_a^b \varphi(x)dx$, $\int_m^n \psi(y)dy$; et elle pourra servir à les déterminer.

Mais il faut, pour cela, transformer l'intégrale double au moyen d'un changement de variables; car, tant qu'on y laissera paraître x et y, ou tant que les intégrations devront se faire par rapport à x et à y, elles porteront inévitablement, comme le montre (18), sur les différentielles $\varphi(x)dx$ et $\psi(y)dy$; ce qu'il s'agit précisément d'éviter. Voyons donc, sur quelques exemples, comment s'effectueront de telles transformations.

323. — Premier exemple : intégrale de Poisson.

Le plus simple et le plus usuel de ces exemples est relatif à l'inté-

grale, *dite de Poisson* [1], $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$, évidemment positive comme tous ses éléments, et rendue bien déterminée par le décroissement de la fonction e^{-x^2}, infiniment plus accusé, quand x grandit beaucoup, que celui de l'inverse d'une puissance quelconque, même très élevée, de x^2.

Écrivons cette intégrale, en y introduisant une autre variable y au lieu de x, $\int_0^\infty e^{-y^2}dy$; puis, formons-en le carré, par la multiplication de $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ et de $\int_0^\infty e^{-y^2}dy$, après avoir, pour fixer les idées, remplacé provisoirement par un nombre très grand K les limites supérieures infinies. Ce carré sera très sensiblement, d'après (18), l'intégrale double, à champ bien circonscrit,

$$\int_0^{K}\left(e^{-x^2}\int_0^{K}e^{-y^2}dy\right)dx.$$

Pour en faciliter, comme on verra, la transformation, supprimons tous les éléments compris de $x=0$ à $x=$ une très petite quantité ε, éléments ayant en tout une somme $\int_0^{\varepsilon}\left(e^{-x^2}\int_0^{K}e^{-y^2}dy\right)dx$ de l'ordre de $\varepsilon\int_0^{K}e^{-y^2}dy$, c'est-à-dire insignifiante; et, de plus, remplaçons-y K, au haut du signe $\int$ entre parenthèses, par la limite supérieure plus grande $K\frac{x}{\varepsilon}$, ou écrivons-la $\int_\varepsilon^{K}\left(e^{-x^2}\int_0^{K\frac{x}{\varepsilon}}e^{-y^2}dy\right)dx$, ce qui revient à introduire dans le facteur $\int_0^{K}e^{-y^2}dy$ de nouveaux éléments, d'une somme totale $\int_K^{K\frac{x}{\varepsilon}}e^{-y^2}dy$ négligeable. L'intégrale double à évaluer étant ainsi $\int_\varepsilon^{K}dx\int_0^{K\frac{x}{\varepsilon}}e^{-(x^2+y^2)}dy$, prenons-y, comme nouvelle variable u de l'intégration en y pendant laquelle x (compris entre ε et K) ne change pas, le rapport $\frac{y}{x}$, croissant de zéro à $\frac{K}{\varepsilon}$ pen-

---

[1] A cause d'une démonstration élégante qu'en a donnée ce géomètre (pp. 101*, 102* et 121*); mais le calcul en avait été fait antérieurement par Laplace et même par Euler.

dant que y va de zéro à $K\frac{x}{\varepsilon}$. Il faudra donc remplacer y par xu, dy par $x\,du$, et les deux limites o, $K\frac{x}{\varepsilon}$, respectivement, par o, $\frac{K}{\varepsilon}$. Il vient l'intégrale double, à limites constantes bien définies,

$$\int_\varepsilon^K dx \int_0^{\frac{K}{\varepsilon}} e^{-x^2(1+u^2)} x\,du,$$

que l'on peut évidemment écrire, en y changeant l'ordre des intégrations,

$$\int_0^{\frac{K}{\varepsilon}} du \int_\varepsilon^K e^{-(1+u^2)x^2} x\,dx.$$

En résumé, celle-ci exprime donc le carré de $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$, avec une approximation indéfinie, pourvu qu'on y prenne ε assez petit et K assez grand; de sorte que, si l'on pose finalement $\varepsilon = 0$ et $K = \infty$, il vient

$$\left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)^2 = \int_0^\infty du \int_0^\infty e^{-(1+u^2)x^2} x\,dx. \tag{19}$$

Or, grâce au facteur x qu'a introduit la substitution de $x\,du$ à dy, les intégrations indiquées au second membre de (19) aboutissent. On a, en effet, $e^{-(1+u^2)x^2}x\,dx = \frac{d}{dx}\,\frac{-e^{-(1+u^2)x^2}}{2(1+u^2)}$ et, par suite,

$$\int_0^\infty e^{-(1+u^2)x^2} x\,dx = \left[\frac{-e^{-(1+u^2)x^2}}{2(1+u^2)}\right]_{x=0}^{x=\infty} = \frac{1}{2(1+u^2)};$$

d'où il résulte, pour le second membre de (19), la valeur

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{2}(\operatorname{arc\,tang} u)_0^\infty = \frac{\pi}{4}.$$

Enfin, l'extraction de la racine carrée positive des deux membres donne la formule cherchée de l'intégrale de Poisson :

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{20}$$

On double la valeur de cette intégrale en y remplaçant la limite zéro par $-\infty$; car, la fonction e^{-x^2} étant *paire*, c'est-à-dire ne changeant pas de signe quand x en change, l'élément $e^{-(a+dx)^2}dx$, qui a son champ dx compris entre deux valeurs négatives et se suivant,

$-(a+dx)$. $-a$, de x, d'ailleurs quelconques, peut être regardé, sauf erreur négligeable, comme la répétition de l'élément $e^{-a^2}dx$ dont le champ égal dx se trouve compris entre les valeurs positives correspondantes a et $a+dx$ de la variable. La formule (20) équivaut donc à celle-ci,

$$(21)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

Une remarque analogue s'appliquerait évidemment à toute intégrale de la forme $\int_0^m f(x)dx$ ayant sous le signe $\int$ une fonction $f(x)$ *paire*, tandis que, dans le cas contraire d'une fonction $f(x)$ *impaire*, ou qui change de signe avec x, les éléments à champ d'intégration compris entre les valeurs négatives de la variable neutralisent, au lieu de les doubler, les éléments correspondant à ses valeurs positives. Ainsi, l'on aura, en général :

$$(22)\qquad \left\{\begin{array}{l} \text{Si } f(-x) = f(x), \\ \displaystyle\int_{-m}^{0} f(x)\,dx = \int_0^m f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-m}^{m} f(x)\,dx; \\ \text{si } f(-x) = -f(x), \\ \displaystyle\int_{-m}^{0} f(x)\,dx = -\int_0^m f(x)\,dx, \quad \text{ou} \quad \int_{-m}^{m} f(x)\,dx = 0. \end{array}\right.$$

324*. — Application de l'intégrale de Poisson au calcul de certaines valeurs de la fonction Γ.

(Compléments, p. 121*.)

325*. — Deuxième exemple : évaluation des intégrales eulériennes de première espèce, ou à deux paramètres, en fonction de celles de seconde espèce Γ.

(Compléments, p. 122*.)

326*. — Troisième exemple : intégrales $\int_0^\infty e^{-ax^2}\cos bx^2\,dx$ et $\int_0^\infty e^{-ax^2}\sin bx^2\,dx$.

(Compléments, p. 124*.)

327*. — Application aux intégrales de la diffraction $\int_0^\infty \cos bx^2\,dx$ et $\int_0^\infty \sin bx^2\,dx$.

(Compléments, p. 126*.)

328*. — Calcul de certaines intégrales définies par introduction d'un paramètre, suivie d'opérations diverses sur les résultats : application à $\int_0^\infty e^{-x^2}\operatorname{ch} 2\alpha x\,dx$ et à $\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2\alpha x\,dx$.

(Compléments, p. 128*.)

329*. — Réflexion sur les transformations d'intégrales peu convergentes et sur l'introduction provisoire de facteurs exponentiels décroissants, destinée à y garantir l'exactitude des résultats.

(Compléments, p. 131*.)

330*. — Calcul, par le même procédé, de $\int_0^\infty \cos x^2 \cos 2\alpha x\,dx$ et de $\int_0^\infty \sin x^2 \cos 2\alpha x\,dx$.

(Compléments, p. 132*.)

331*. — Intégrales déduites d'autres par l'attribution, à certains paramètres, de valeurs imaginaires.

(Compléments, p. 134*.)

332*. — Calcul de certaines intégrales par le moyen d'équations différentielles qu'elles vérifient.

(Compléments, p. 136*.)

TRENTE ET UNIÈME LEÇON.

*EXPRESSIONS ASYMPTOTIQUES DE CERTAINES INTÉGRALES DÉFINIES ET USAGE DE CES EXPRESSIONS.

333*. — Premier exemple d'une expression asymptotique d'intégrale définie : cas de la fonction Γ, ou formule de Stirling.

(Compléments, p. 138*.)

334*. — Expression indéfiniment approchée (sous forme de produit) qui résulte, pour toutes les valeurs de $\Gamma(n)$, de la forme asymptotique de cette fonction.

(Compléments, p. 141*.)

335*. — Deuxième exemple : expressions asymptotiques de $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)\,dx}{\operatorname{coh}^n x}$ et de $\int_{-\infty}^{x}\frac{f(x)\,dx}{\operatorname{coh}^n x}$.

(Compléments, p. 145*.)

336*. — Développement en série, grâce à ces expressions asymptotiques, des intégrales de la forme $\int\frac{f(x)\,dx}{\operatorname{coh}^n x}$, quand $f(x)$ est une fonction proportionnelle à sa dérivée seconde.

(Compléments, p. 147*.)

337*. — Troisième exemple : expressions asymptotiques de $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(r\cos x)\,dx$ et de $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m}x\cos(r\cos x)\,dx$, où r désigne un paramètre qui grandit sans limite.

(Compléments, p. 152*.)

338*. — Du calcul approché des intègrales $\int_0^u e^{-x^2}\,dx$, $\int_0^u \cos x^2\,dx$, $\int_0^u \sin x^2\,dx$, quand elles diffèrent modérément de ce qu'elles sont pour u infini.

(Compléments, p. 155*.)

TRENTE-DEUXIÈME LEÇON.

* SUITE DES CALCULS D'EXPRESSIONS ASYMPTOTIQUES D'INTÉGRALES DÉFINIES : SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES.

339*. — **Autre exemple : développement d'une fonction périodique finie quelconque suivant les cosinus et sinus affectés de la même périodicité : intégrale définie dont cette fonction représente l'expression asymptotique.**

(Compléments, p. 159*.)

340*. — **Démonstration de la série de Fourier, ou série trigonométrique principale, par le calcul de l'expression asymptotique d'intégrale qui la résume.**

(Compléments, p. 164*.)

341*. — **Séries trigonométriques dérivées de celle de Fourier et procédant, les unes, suivant les sinus, les autres, suivant les cosinus des multiples ou quelconques, ou impairs, d'un arc.**

(Compléments, p. 167*.)

342*. — **Formule de Fourier, permettant de donner à une fonction arbitraire la forme d'une intégrale double à élément trigonométrique.**

(Compléments, p. 168*.)

343*. — **Exemples : développement de quelques fonctions simples, entre les limites zéro et π, en séries procédant suivant les sinus ou les cosinus des multiples de la variable ; remarque sur les séries trigonométriques non susceptibles d'être différentiées ; sommation de séries numériques importantes.**

(Compléments, p. 170*.)

344*. — Des séries trigonométriques, doubles ou triples, que donne le développement des fonctions de point dans un espace à deux ou trois dimensions constantes, et des intégrales soit quadruples, soit sextuples, auxquelles conduit alors la formule de Fourier, quand cet espace est indéfini en tous sens.

(Compléments, p. 174*.)

TRENTE-TROISIÈME LEÇON.

*DE L'EMPLOI DES INTÉGRALES DÉFINIES, POUR EXPRIMER DES FONCTIONS ÉCHAPPANT GÉNÉRALEMENT AUX AUTRES MODES DE REPRÉSENTATION FOURNIS PAR L'ANALYSE : INTÉGRALES POURVUES, SOUS LES SIGNES $\int$, DE FONCTIONS ARBITRAIRES, ET DONT LES DÉRIVÉES ONT DES FORMES SIMPLES.

345*. — De la représentation des fonctions par les intégrales définies; sur certains types d'intégrales faciles à différentier, et ayant sous les signes $\int$ des fonctions arbitraires.

(Compléments, p. 176*.)

346*. — Premier type : intégrales de la forme $\int_0^\infty f\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)\psi\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right)d\alpha$ et de la forme plus générale $\int_0^\infty \mathrm{F}\left(\frac{\alpha^2}{2}, \frac{t^2}{2\alpha^2}\right)d\alpha$.

(Compléments, p. 178*.)

347*. — Cas particulier d'intégrales se reproduisant par différentiation; calcul de $\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\left(\alpha^2+\frac{t^2}{\alpha^2}\right)}d\alpha$.

(Compléments, p. 181*.)

348*. — Propriétés qu'acquiert le premier type, quand on y introduit comme paramètre, au lieu de t, l'une quelconque de ses puissances.

(Compléments, p. 183*.)

349*. — Emploi de ce type pour former des fonctions de point dont le paramètre différentiel Δ_2 soit d'un calcul facile.

(Compléments, p. 186*.)

TRENTE-QUATRIÈME LEÇON.

*SUITE DE L'EMPLOI DES INTÉGRALES DÉFINIES, POUR EXPRIMER CERTAINES FONCTIONS : THÉORIE GÉNÉRALE DES POTENTIELS; POTENTIELS SPHÉRIQUES.

330*. — Second type : des potentiels; leur définition générale.

(Compléments, p. 190*.)

331*. — Calcul de leurs dérivées par rapport aux coordonnées du point potentié.

(Compléments, p. 192*.)

332*. — Du potentiel sphérique ou potentiel à quatre variables.

(Compléments, p. 195*.)

333*. — Autre potentiel, analogue au potentiel sphérique, mais applicable dans des espaces ayant, à volonté, une, deux ou trois dimensions.

(Compléments, p. 198*.)

334* — Paramètre différentiel, d'un ordre pair quelconque, d'une fonction de point, et puissances paires quelconques de son paramètre différentiel du premier ordre.

(Compléments, p. 202*.)

TRENTE-CINQUIÈME LEÇON.

*SUITE DE LA THÉORIE DES POTENTIELS : ÉTUDE SPÉCIALE DE CEUX DANS LESQUELS L'INTÉGRATION S'ÉTEND A TOUTE LA MASSE POTENTIANTE.

355*. — Des potentiels où l'intégration s'étend à toute la masse potentiante; cas où l'on peut les différentier sous les signes $\int$, soit exactement, soit avec addition d'un terme simplement proportionnel à la densité de cette masse au point potentié.

(Compléments, p. 208*.)

356*. — Potentiels inverse et direct à trois variables; des fonctions qu'ils sont propres à exprimer.

(Compléments, p. 213*.)

357*. — Rapports des potentiels tant inverse que direct, et d'autres analogues, avec le potentiel sphérique; potentiels logarithmiques à deux variables et leur usage.

(Compléments, p. 217*.)

358*. — Potentiel inverse, et potentiels logarithmiques à trois variables d'une couche plane infiniment mince.

(Compléments, p. 222*.)

TRENTE-SIXIÈME LEÇON.

DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES : THÉORIE DE L'ÉQUATION DU PREMIER ORDRE

---

359. Des équations différentielles : importance de leur rôle dans l'expression analytique des phénomènes.

Revenons maintenant à l'étude d'une fonction quelconque y d'une variable x, pour chercher jusqu'à quel point se trouve déterminée et comment peut s'obtenir la suite de ses valeurs, quand on donne sa dérivée première y', ou seulement quelqu'une, $y^{(n)}$, de ses dérivées suivantes y'', y''', ..., en fonction non pas de sa variable indépendante x seule, comme nous l'admettions jusqu'ici, mais plutôt de sa valeur actuelle y, ou de celles des dérivées successives y', y'', ..., $y^{(n-1)}$, d'ordres moins élevés que $y^{(n)}$, ou, enfin, de toutes ces quantités à la fois, $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$. Alors la relation définissant $y^{(n)}$, et qui contient, dans le cas le plus général, $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$, $y^{(n)}$, s'appelle une *équation différentielle :* son *ordre* est l'ordre même, n, de la dérivée la plus élevée qui y figure. Nous la supposerons, d'ordinaire, résolue par rapport à cette dérivée la plus élevée $y^{(n)}$, ce que l'on pourra toujours regarder comme fait quand elle sera du premier degré en $y^{(n)}$: et nous admettrons que, mise ainsi sous la forme $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$, elle ne fournisse, pour chaque système, à considérer, de valeurs de $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$, qu'une valeur de $y^{(n)}$. Mais, quelquefois aussi, elle se trouvera *implicite,* c'est-à-dire non résolue par rapport à $y^{(n)}$: si elle est cependant algébrique en $y^{(n)}$, le degré le plus élevé auquel $y^{(n)}$ y figurera sera dit le *degré de l'équation.* Quoi qu'il en soit, algébrique ou transcendante, elle se décomposera, par sa résolution (générale ou seulement numérique), relative à $y^{(n)}$, en autant d'équations différentielles, de la forme $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$, qu'elle admettra de racines réelles. Dans tous les cas, *intégrer l'équation*, ce sera exprimer ou calculer les fonctions y qui la vérifient.

On peut dès à présent entrevoir, par la réflexion qui a terminé le

n° **213** (p. 2), l'intérêt capital que présentent ces sortes d'équations dans l'étude des phénomènes naturels.

Pour ne parler que des faits innombrables où le temps t intervient en qualité de variable indépendante, et qualifiés de *dynamiques* (par opposition à ceux d'*équilibre* ou de *permanence*, tout spéciaux, dits *statiques*), comme sont les transformations successives des corps et surtout leurs simples mouvements, ou changements de situation de leurs particules, auxquels semblent liés leurs autres changements d'état, il serait impossible d'en prendre une connaissance tant soit peu exacte sans recourir aux équations différentielles. En effet, d'après les lois physiques, c'est toujours de la manière d'être actuelle du système matériel ou ensemble de particules dont on veut étudier les transformations, que dépendent les changements éprouvés par cette manière d'être durant un instant infiniment petit dt.

Plus précisément, la rapidité de variation de l'état de la matière, rapidité que définissent les dérivées premières en t des quantités le représentant, se règle d'après les valeurs actuelles de ces quantités; et l'on peut dire que *la dérivée de l'état actuel est directement fonction non pas de la variable indépendante t, mais de l'état actuel lui-même*. Par exemple, la température d'un corps chauffé décroît d'autant plus vite que sa valeur actuelle excède davantage celle du milieu environnant; la vitesse d'un projectile, à travers un fluide (comme l'air) assez peu résistant pour ne l'amortir qu'au bout d'un temps très long, diminue avec une lenteur croissante à mesure qu'elle devient elle-même plus faible; un ressort tendu qui se débande, produit, pendant des instants infiniment petits successifs dt, sur le corps qu'il entraîne, des accroissements de vitesse constamment proportionnels à son degré présent d'extension ou de contraction; etc. Bref, les changements infiniment petits qui surviennent, d'un instant à l'autre, dans un système de corps, dépendent toujours de l'état actuel du système; et c'est bien en fonction des quantités mêmes définissant cet état, que sera donnée leur dérivée par rapport au temps, variable indépendante souvent unique, mais toujours principale, dans les questions dynamiques.

Ainsi les lois physiques s'expriment mathématiquement par des équations différentielles; d'où il suit que la théorie de ces équations doit servir de base à toute étude analytique des phénomènes naturels.

360. — Équation différentielle du premier ordre : existence de l'intégrale générale et possibilité d'intégrales ou solutions singulières.

Bornons-nous, dans cette Leçon, à l'équation du premier ordre et supposons-la même, d'abord, explicite, c'est-à-dire de la forme

$$(1) \qquad y' = f(x, y) \quad \text{ou} \quad dy - f(x, y)\,dx = 0,$$

f étant une fonction connue des deux variables x et y. Pour fixer les idées, nous regarderons la variable indépendante x comme une abscisse, et sa fonction y comme l'ordonnée correspondante d'une courbe plane.

Dans le cas le plus simple, une telle équation différentielle se réduit à $y' = f(x)$, ou à $dy = f(x)\,dx$; elle signifie que y, ayant pour dérivée $f(x)$, est la fonction primitive indéfinie $\int f(x)\,dx$. Et une discussion faite, pour ce cas, dès le début du Calcul intégral (p. 3), nous a montré qu'une pareille équation détermine seulement, à chaque instant ou pour chaque valeur de x, la direction de la courbe cherchée, en sorte qu'elle permet d'obtenir la fonction y, de proche en proche, après qu'on s'est donné ***arbitrairement*** une première ordonnée y_0, dite ***valeur initiale*** de y et correspondant à l'abscisse x_0 choisie comme valeur initiale de la variable. Or il en sera évidemment de même dans le cas de l'équation plus générale (1) : car celle-ci détermine encore uniquement, pour chaque point (x, y) du plan, la pente y' qu'y a la ligne cherchée, si elle y passe ; et elle permet ainsi à un point mobile (x, y), quelle qu'ait été sa situation initiale (x_0, y_0), de décrire, en prenant sans cesse (sur une longueur infiniment petite) la direction indiquée, une courbe partout conforme à l'équation (1), avec des abscisses x s'éloignant peu à peu, sans limite, de l'abscisse primitive x_0, tant du moins que le point mobile (x, y) reste dans les régions du plan où la valeur $f(x, y)$ de y' ne devient ni infinie, ni imaginaire. Seulement, la *pente* y' du chemin suivi dépend maintenant de y, et non plus uniquement de l'abscisse x. Par suite, les diverses courbes correspondant, pour $x = x_0$, à diverses ordonnées initiales y_0, n'auront plus les mêmes directions, pour chaque valeur de x, et représenteront des fonctions y différant entre elles tout autrement que par une constante arbitraire.

Donc, quelle que soit l'équation différentielle (1), il existe toujours une fonction y, de x, qui la vérifie et qui, de plus, pour $x = x_0$, peut recevoir telle valeur, y_0, que l'on veut, du moins entre les limites où l'expression $f(x, y)$ de y' est réelle et finie. Si l'on désigne par F une certaine fonction de deux variables, cette quantité y pourra s'écrire

$y = F(x, y_0)$, puisqu'elle dépend à la fois de la valeur initiale y_0 et de l'abscisse variable x. On l'appelle l'*intégrale générale* de l'équation proposée (1). On voit qu'elle représente une *famille* de courbes ayant pour équation différentielle (t. I, p. 124) la relation donnée, $y' = f(x, y)$, pour paramètre y_0, et pour champ les régions du plan où la fonction $f(x, y)$ admet des valeurs réelles.

L'intégrale générale $y = F(x, y_0)$ est-elle la seule solution que comporte l'équation (1)? En d'autres termes, toute fonction, Y par exemple, qui, pour $x = x_0$, se réduit à y_0, et dont la dérivée égale à chaque instant $f(x, Y)$, se confond-elle nécessairement avec la fonction $y = F(x, y_0)$, ou peut-elle, au contraire, s'en séparer, du moins sous certaines conditions? Le simple coup d'œil que nous venons de jeter sur l'équation (1), et qui nous a montré clairement l'existence incessante, devant le point mobile, d'un chemin $y = F(x, y_0)$ satisfaisant à l'équation (1), ne permet pas de décider si ce chemin est unique, ou s'il comporte des dédoublements, constitués par des courbes raccordées entre elles, c'est-à-dire mutuellement tangentes en leur point de jonction. Mais le fait, pour certaines familles, de l'existence de lignes, enveloppes ou non, touchées successivement par les diverses courbes de ces familles (t. I, p. 215 et 183*), prouve directement que de telles bifurcations ou séparations d'intégrales sont quelquefois possibles. Car il suffit que la famille de courbes $y = F(x, y_0)$ possède une enveloppe ou soit, à défaut de celle-ci, croisée par une ligne tangente à toute la famille, pour que cette enveloppe ou cette ligne tangente ait, en chacun de ses points (x, y), la même pente $y' = f(x, y)$ que l'enveloppée ou la courbe particulière venue à son contact, et satisfasse, par suite, sur tout son cours, à l'équation $y' = f(x, y)$ de la famille. Donc l'ordonnée y de cette ligne, bien que définissant, en général, une fonction de x très différente de toutes celles que comprend la formule $y = F(x, y_0)$, n'en constitue pas moins une intégrale de l'équation proposée (1). On l'appelle la *solution singulière,* pour la distinguer des *solutions* ou *intégrales particulières* que donne l'*intégrale générale* $y = F(x, y_0)$ quand on y attribue à y_0 toutes les valeurs constantes possibles. La ligne qu'elle représente se sépare, comme on voit, sur tout son cours, des courbes exprimées par l'intégrale générale, qui viennent, les unes après les autres, la toucher, c'est-à-dire se joindre à elle pour la quitter aussitôt.

361*. — Unité de l'intégrale générale.

(Compléments, p. 279*.)

362*. — Calcul direct des solutions singulières et des systèmes de valeurs des variables pour lesquels des réunions ou des séparations d'intégrales sont possibles.

(Compléments, p. 230*.)

363*. — Propriété, qu'ont ordinairement ces systèmes de valeurs, de représenter des enveloppes, tangentes ou non à leurs enveloppées exprimées par l'intégrale générale.

(Compléments, p. 231*.)

364. — Formes diverses de l'intégrale générale; facteurs d'intégrabilité.

L'intégrale générale $y = F(x, y_0)$ peut être mise sous une infinité d'autres formes, soit explicites, comme celle-là, par rapport à y, et obtenues en y faisant paraître, au lieu de la valeur initiale y_0, une autre constante c liée à y_0 d'une manière quelconque ou définie par une équation de la forme $c = \psi(y_0)$, soit même implicites, quand y s'y trouve déterminé, en fonction de x et de la constante arbitraire y_0 ou c, au moyen d'une équation non résolue. Une telle relation, de la forme $\Phi(x, y, c) = 0$, s'appelle l'*équation intégrale*, ou simplement l'*intégrale*, de l'équation différentielle proposée $y' = f(x, y)$.

Parmi ces dernières, qui sont implicites, il faut distinguer surtout celle où l'équation intégrale se trouve résolue par rapport à y_0 ou à une fonction de y_0 seul, c'est-à-dire par rapport à une *constante arbitraire c*, et mise ainsi sous la forme $\varphi(x, y) - c = 0$, équivalente à $\varphi(x, y) = c$; car, alors, une simple différentiation, donnant

$$\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy} y' = 0 \qquad \text{ou} \qquad y' = -\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y},$$

conduit à une valeur de y' débarrassée de la constante c, comme on l'a déjà vu dans la VIII^e Leçon (t. I, p. 124), tandis que, dans tout autre cas, il faudrait, pour éliminer c de l'équation obtenue en différentiant l'intégrale, y porter la valeur de c tirée de l'équation intégrale elle-même. Aussi la forme $\varphi(x, y) = c$ jouit-elle, pour cette raison, d'importantes propriétés, qui lui ont fait donner le nom de *forme normale* de l'intégrale.

Observons que, dans le cas où c n'est autre chose que la valeur initiale y_0 de la fonction, cette forme normale $y_0 = \varphi(x, y)$ revient à considérer y_0 comme dépendant de x et y, c'est-à-dire d'une valeur quelconque de la variable x et de la valeur correspondante y de la

fonction : point de vue très naturel ; car, si l'on avait adopté telle valeur x qu'on veut pour valeur initiale, y aurait pu, à ce moment, être choisi à volonté, et c'est alors y_0, correspondant à la valeur particulière x_0 de la variable, qui serait devenu fonction tant de la nouvelle valeur initiale quelconque x de la variable, que de la valeur correspondante attribuée à y. Ainsi, tandis que la forme explicite $y = F(x, y_0)$ suppose que l'on considère, isolément, une certaine valeur de x, toujours la même, comme initiale, la forme normale $\varphi(x, y) = y_0$, ou, par suite, $\varphi(x, y) = c$, représente, au contraire, la comparaison ou le rapprochement de toutes les valeurs de x et y qui, prises successivement comme initiales, se correspondent pour former ensemble une même intégrale de l'équation $y' = f(x, y)$.

La relation $\varphi(x, y) = c$ différentiée donnant

$$\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy} y' = 0 \qquad \text{ou} \qquad -\frac{d\varphi}{dy} y' = \frac{d\varphi}{dx},$$

si nous remplaçons y' par sa valeur $f(x, y)$, que nous écrirons simplement f, il viendra $-\frac{d\varphi}{dy} f = \frac{d\varphi}{dx}$. Or nous avons vu qu'on peut, dans $\varphi(x, y) = c$, faire correspondre tour à tour, à chaque valeur de x, toutes les valeurs possibles de y, du moins entre les limites où la fonction $f(x, y)$ reste réelle. En d'autres termes, la famille $\varphi(x, y) = c$ de courbes couvre avec continuité l'espace, sur le plan des xy, autour de chaque point (x, y). C'est donc *identiquement*, ou pour x et y quelconques, que le produit des deux fonctions $-\frac{d\varphi(x, y)}{dy}$, $f(x, y)$, égale la fonction $\frac{d\varphi(x, y)}{dx}$. Et si l'on met l'équation différentielle proposée sous la forme $y' - f(x, y) = 0$, équivalente à $dy - f\,dx = 0$, puis qu'on multiplie son premier membre par $\frac{d\varphi}{dy}$, il viendra l'*identité*

$$(6) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dy}(y' - f) = \dfrac{d\varphi}{dx} + \dfrac{d\varphi}{dy} y' \\ \text{ou} \\ \dfrac{d\varphi}{dy}(dy - f\,dx) = \dfrac{d\varphi}{dx} dx + \dfrac{d\varphi}{dy} dy = d\varphi. \end{cases}$$

Donc le facteur $\frac{d\varphi}{dy}$, que j'appellerai v pour abréger, transforme en une différentielle exacte par rapport à x et à y le premier membre de l'équation proposée $dy - f\,dx = 0$; et il suffirait de connaître ce

facteur, pour ramener immédiatement le calcul de la fonction φ ou, par suite, de l'intégrale générale $\varphi(x,y)=c$ au problème, résolu plus haut par des quadratures (p. 10), de l'intégration d'une différentielle totale $d\varphi = M\,dx + N\,dy$. On aurait ici

$$M = -f\frac{d\varphi}{dy} = -fv, \quad N = v.$$

Ainsi, *il existe toujours un facteur, généralement fonction à la fois de x et de y, qui rend immédiatement intégrable, c'est-à-dire réductible aux quadratures, l'équation différentielle proposée* $dy - f\,dx = 0$. On l'appelle le *facteur d'intégrabilité* ou le *facteur intégrant*. Et l'on voit qu'il en existe même un pour chacune des formes normales que peut recevoir l'intégrale, puisqu'il y en a une pour toute fonction possible de y_0, savoir $c = \psi(y_0)$, que l'on voudra choisir comme constante arbitraire.

365*. — Des solutions qui rendent infini le facteur intégrant et, notamment, des intégrales soit singulières, soit asymptotes.

(Compléments, p. 233*.)

366*. — Analogies des intégrales singulières et des intégrales asymptotes : plus grande fréquence de celles-ci.

(Compléments, p. 235*.)

367. — Principaux types d'équations du premier ordre dont on connait le facteur intégrant. — Premier type : cas où les variables se séparent; équations homogènes, etc.

Il n'existe, malheureusement, qu'un nombre restreint de cas où l'on sache trouver le facteur d'intégrabilité : nous allons passer en revue ceux qui présentent quelque généralité ou semblent pouvoir offrir une certaine importance pratique.

Pour commencer par le plus simple, supposons que l'équation proposée soit de la forme

$$(13) \qquad y' = f(x)\varphi(y) \qquad \text{ou} \qquad dy - f(x)\varphi(y)\,dx = 0,$$

c'est-à-dire que la valeur de y' doive égaler le produit d'une fonction ne dépendant que de x par une fonction ne dépendant que de y. Alors le facteur d'intégrabilité est $\frac{1}{\varphi(y)}$. En effet, si l'on divise la seconde

(13) par $\varphi(y)$, il vient $\frac{dy}{\varphi(y)} - f(x)\,dx = 0$, équation dont le premier membre a la forme $M\,dx + N\,dy$, avec les valeurs $M = -f(x)$, $N = \frac{1}{\varphi(y)}$ qui vérifient bien la condition d'intégrabilité $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$, puisqu'elles donnent $\frac{dM}{dy} = 0$ et $\frac{dN}{dx} = 0$. L'intégrale générale est

$$\int \frac{dy}{\varphi(y)} - \int f(x)\,dx = \text{une constante } c. \tag{14}$$

Elle s'obtiendra donc par deux quadratures, effectuées sur des différentielles contenant seulement, l'une x, l'autre y. On dit, pour cette raison, que *les variables sont séparées* dans l'équation

$$\frac{dy}{\varphi(y)} - f(x)\,dx = 0$$

ou, encore, que la division de (13) par $\varphi(y)$ a effectué la *séparation des variables*.

Des transformations très simples réduisent certaines équations à la forme (13) et permettent, par suite, de les intégrer ou, du moins, d'y ramener à des quadratures le calcul de la fonction inconnue.

S'il s'agit, par exemple, d'une équation de la forme

$$y' = \psi(ax + by + c),$$

où ψ désignera une fonction quelconque de l'expression linéaire

$$ax + by + c,$$

il suffira de choisir cette expression linéaire comme nouvelle fonction inconnue, en posant $u = ax + by + c$ et, par suite, $u' = a + by'$ ou $y' = \frac{u' - a}{b}$, pour que l'équation, devenue $u' = a + b\psi(u)$, rentre dans le type (13), écrit $u' = f(x)\varphi(u)$, avec $f(x) = 1$ et

$$\varphi(u) = a + b\psi(u).$$

De même, si l'équation proposée a la forme

$$d(xy^m) - kx^a y^b\, d(xy^n) = 0,$$

avec m, n, a, b, k constants, il suffira d'adopter, comme nouvelle variable X et comme nouvelle fonction Y, les produits xy^n, xy^m, en posant $xy^n = X$, $xy^m = Y$ (d'où résulteront des valeurs monômes de x et y en X et Y), pour que l'équation proposée prenne la forme

$dY - kX^\alpha Y^\beta dX = 0$ et soit ainsi comprise dans la seconde (13), écrite $dY - f(X)\varphi(Y)dX = 0$.

Mais la plus remarquable de ces sortes de transformations, due à Jean Bernoulli, est relative aux équations dites *homogènes*. On appelle ainsi celles qui peuvent s'écrire $M\,dx + N\,dy = 0$, M et N désignant deux fonctions homogènes, en x et y, *du même degré*. Par suite, la valeur qu'on en tire pour y', quotient de $-M$ par N, est elle-même homogène du degré zéro et ne dépend que du rapport $\frac{y}{x}$. Il s'agit donc, en définitive, des équations de la forme

$$(15) \qquad y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \text{ou} \qquad dy - f\left(\frac{y}{x}\right)dx = 0.$$

Choisissons pour variable indépendante auxiliaire, au lieu de x, le rapport $\frac{y}{x}$, que nous appellerons t; et proposons-nous de déterminer x en fonction de t, après quoi y aura, aussi en fonction de t, l'expression évidente tx. Comme la relation $y = xt$ donne $dy = x\,dt + t\,dx$, la seconde (15), proposée, deviendra

$$(16) \qquad x\,dt + [t - f(t)]\,dx = 0 \qquad \text{ou} \qquad dx + \frac{x}{t - f(t)}dt = 0,$$

équation rentrant bien dans le type (13), pris sous la forme

$$dx - \mathrm{f}(t)\varphi(x)\,dt = 0;$$

car il suffit d'y poser $\mathrm{f}(t) = \frac{-1}{t - f(t)}$ et $\varphi(x) = x$. Les variables se séparent en divisant par x, et l'intégrale générale est ensuite

$$(17) \qquad \begin{cases} \log x + \displaystyle\int \frac{dt}{t - f(t)} = \text{une constante arbitraire } \log c \\ \text{ou} \\ \log \dfrac{x}{c} = -\displaystyle\int \frac{dt}{t - f(t)}. \end{cases}$$

Il ne restera donc qu'à effectuer, dans chaque cas, la quadrature $\int \frac{dt}{t - f(t)}$.

L'équation est quelquefois homogène, non par rapport à x et à y, mais par rapport à leurs excès $X = x - \alpha$, $Y = y - \beta$ sur des constantes α, β; et il suffit évidemment alors, pour la ramener au type (15), d'y remplacer $x - \alpha$, $y - \beta$, dx, dy, respectivement, par X, Y,

dX, dY. Tel est le cas d'une équation comme

$$(18)\quad \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y + ax - b}{y + a'x - b'}\right),\quad \text{qui s'écrira}\quad \frac{dy}{dx} = f\left[\frac{(y-\beta)+a(x-\alpha)}{(y-\beta)+a'(x-\alpha)}\right],$$

en y déterminant α et β par les deux équations du premier degré $b = \beta + a\alpha$, $b' = \beta + a'\alpha$, compatibles toutes les fois que a' diffère de a. Si, au contraire, a' égalait a, la fonction f ne dépendrait que de l'expression linéaire $y + ax$, et l'équation proposée s'intégrerait, comme on a vu tout à l'heure, en se donnant $y + ax$ pour fonction inconnue.

368. — Deuxième type : équation linéaire; équation de Bernoulli, etc.

On appelle, en général, *équations linéaires* les équations qui sont *du premier degré par rapport aux fonctions inconnues et à leurs dérivées,* tout en pouvant être d'un degré quelconque, ou même transcendantes, par rapport aux variables indépendantes. D'après cette définition, l'équation différentielle linéaire du premier ordre sera évidemment réductible à la forme

$$(19)\qquad y' + Py = Q \qquad \text{ou} \qquad dy + Py\,dx = Q\,dx,$$

P et Q désignant deux fonctions quelconques de x seul.

Supposons d'abord qu'elle soit, comme on dit, *privée de second membre*, ou qu'on ait $Q = 0$. Alors la valeur, $-Py$, de y' égalera le produit d'une fonction, $-P$, de x par une fonction, y, de y, et les variables se sépareront. En divisant la seconde (19) par y et intégrant, il viendra, si $\log c$ désigne la constante arbitraire introduite,

$$\log y + \int P\,dx = \log c, \quad \text{ou} \quad \log\frac{y}{c} = -\int P\,dx, \quad \text{ou encore} \quad \frac{y}{c} = e^{-\int P\,dx}.$$

On trouve donc $y = ce^{-\int P\,dx}$ et, si l'on résout enfin par rapport à c,

$$(20)\qquad y e^{\int P\,dx} = c.$$

Comme le facteur $e^{\int P\,dx}$ est une fonction de x seul, on voit que l'*équation linéaire sans second membre a une intégrale générale, sous forme normale, également linéaire, ou du premier degré par rapport à la fonction inconnue y.*

Ici, la fonction que nous appelions en général $\varphi(x, y)$ [p. 182] égale $ye^{\int P\,dx}$, et le facteur intégrant $\frac{d\varphi}{dy}$ est $e^{\int P\,dx}$. Or, rétablissant actuellement le deuxième membre Q, multiplions la seconde (19) par le facteur $e^{\int P\,dx}$, puis intégrons. Comme $e^{\int P\,dx} P\,dx = de^{\int P\,dx}$ et que, par

suite,

$$e^{\int P dx}(dy + Py\,dx) = d(y e^{\int P dx}),$$

il viendra

$$(21)\quad \begin{cases} y e^{\int P dx} = \int Q e^{\int P dx} dx + \text{une constante } c \\ \text{ou} \quad y = (c + \int Q e^{\int P dx} dx) e^{-\int P dx}. \end{cases}$$

Par conséquent, *un même facteur intégrant convient pour les deux cas de l'équation sans second membre et de l'équation avec second membre.* Nous verrons, dans une prochaine Leçon, que cette propriété, ainsi que la précédente concernant la linéarité d'une intégrale générale (sous forme normale) par rapport à la fonction inconnue, s'étend à des équations différentielles linéaires quelconques. Déjà, d'après la première (21), la même linéarité subsiste bien pour l'intégrale de l'équation (19), quand il y a un second membre.

C'est Leibnitz qui paraît avoir intégré, le premier, l'équation linéaire (19), ou, plutôt, en avoir réduit l'intégration, comme le montre (21), au calcul des deux quadratures $\int P\,dx$ et $\int Q e^{\int P dx} dx$ [1].

On ramène à l'équation linéaire celle-ci, dite *équation de Bernoulli* [2],

$$(22)\qquad y' + Py = Qy^n,$$

où P et Q sont encore deux fonctions quelconques de x. Quant à l'exposant n, entier ou fractionnaire, positif ou négatif, il diffère de l'unité, sans quoi l'équation, réduite à $y' + (P - Q)y = 0$, serait simplement linéaire sans second membre. Supposant donc n différent de 1, mais d'ailleurs quelconque, multiplions (22) par $(1-n)y^{-n}$, et observons que $(1-n)y^{-n}y'$ exprime la dérivée de y^{1-n}. Il viendra

$$(23)\qquad \frac{d.y^{1-n}}{dx} + (1-n)P.y^{1-n} = (1-n)Q,$$

équation qui, en y regardant y^{1-n} comme la fonction inconnue, est

(1) Dans sa lettre du 27 novembre 1694 au marquis de l'Hôpital. Il y parvient en concevant l'intégrale d'une équation différentielle $M + Ny' = 0$ ordonnée, comme M et N, suivant les puissances de y, et finalement bornée, quand il ne s'agit d'intégrer que (19), aux deux premiers termes, c'est-à-dire de la forme simple $U + Vy = 0$; il y détermine d'ailleurs les fonctions U, V, ... de x, de manière que l'équation, (19), soit vérifiée *identiquement*. Cette méthode, qui, au fond, revient à poser en général c ou $\varphi(x, y) = U + Vy + \ldots$ présupposait, et mettait par là-même en évidence, la forme linéaire de l'intégrale par rapport à y; ce qui est le point capital de la question.

(2) Du nom de Jacques Bernoulli (disciple de Leibnitz, comme son frère Jean Bernoulli) qui l'a étudiée vers la fin de 1695.

bien de la forme (19), sauf le remplacement de P par $(1-n)P$ et de Q par $(1-n)Q$. L'intégrale sera donc, d'après (21),

$$y^{1-n} = \left[c + (1-n)\int Q\, e^{(1-n)\int P\,dx}\, dx\right] e^{-(1-n)\int P\,dx}. \tag{24}$$

L'équation de Bernoulli, qui comprend comme cas particulier, en y faisant $n=0$, l'équation linéaire, n'est donc pas, au fond, plus générale qu'elle, lorsqu'on y adopte y^{1-n} pour fonction inconnue.

L'introduction du rapport $\frac{y}{x} = t$ comme variable indépendante réduit à une équation de Bernoulli celle-ci, moins simple en apparence,

$$dy + f\left(\frac{y}{x}\right) dx = x^n \varphi\left(\frac{y}{x}\right) d\frac{y}{x}, \tag{25}$$

où l'exposant n et les deux fonctions f, φ sont quelconques. Remplaçons, en effet, dans (25), y par tx (d'où $dy = t\,dx + x\,dt$), et il viendra, en divisant finalement par $[t+f(t)]\,dt$,

$$\frac{dx}{dt} + \frac{x}{t+f(t)} = \frac{\varphi(t)}{t+f(t)} x^n; \tag{26}$$

ce qui, si l'on pose $P = \frac{1}{t+f(t)}$, $Q = \frac{\varphi(t)}{t+f(t)}$, rentre bien dans le type (22), où l'on remplacerait respectivement x et y par t et x.

369*. — Absence d'intégrales singulières et d'intégrales asymptotes distinctes, dans l'équation linéaire.

(Compléments, p. 238*.)

370*. — Simplification d'une équation quadrinôme et sa réduction, dans certains cas, à l'équation trinôme de Bernoulli : équation de Riccati.

(Compléments, p. 240*.)

371*. — Troisième type : équations qui s'intègrent par différentiation, comme celle de Clairaut.

(Compléments, p. 242*.)

TRENTE-SEPTIÈME LEÇON.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES D'ORDRE SUPÉRIEUR ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES SIMULTANÉES.

372. — Des équations différentielles du premier ordre simultanées : existence de leurs intégrales générales.

Considérons n fonctions inconnues y, z, u, ... d'une variable indépendante x, définies au moyen d'équations de la forme

$$(1)\qquad \begin{cases} y' \text{ ou } \dfrac{dy}{dx} = f_1(x, y, z, u, \ldots), \\ z' \text{ ou } \dfrac{dz}{dx} = f_2(x, y, z, u, \ldots), \\ u' \text{ ou } \dfrac{du}{dx} = f_3(x, y, z, u, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

qui, pour chaque valeur de la variable x, font connaître leurs dérivées premières en fonction de cette valeur x et des valeurs actuelles de y, z, u, ... elles-mêmes. Un tel ensemble d'équations constitue évidemment l'extension, au cas de plusieurs fonctions inconnues, de l'équation différentielle du premier ordre étudiée dans la Leçon précédente. On l'appelle un système d'*équations différentielles simultanées,* et l'on dit, d'ailleurs, qu'il est du premier ordre, parce que les dérivées du premier ordre sont les plus élevées qui y paraissent.

Si l'on se représente y, z, u, ... comme les ordonnées de tout autant de courbes, en imaginant que ces courbes doivent être tracées par des points, mobiles, tous à la fois, le long d'une même droite, sans cesse perpendiculaire à l'axe des abscisses x et animée d'un mouvement continu dans le sens de cet axe, il est clair qu'on pourra, comme dans le cas d'une fonction unique y ou d'une équation unique $y' = f(x, y)$, se donner sur la droite mobile la position première de tous ces points, c'est-à-dire les valeurs dites *initiales,* y_0, z_0, u_0, ... de y, z, u, ... correspondant à une certaine valeur, x_0, de x, et que c'est alors seulement que les équations (1) détermineront les direc-

tions, définies au moyen des coefficients angulaires y', z', u', ..., prises au même moment par les divers points mobiles. Ceux-ci se rendront de la sorte dans des positions infiniment voisines, où une nouvelle application des équations (1) fera connaître les nouvelles directions, presque identiques aux précédentes, qu'ils devront prendre; et ainsi de suite. Dans quelques situations qu'arrivent ainsi, de proche en proche, les points ayant y, z, u, ... pour ordonnées, il existera toujours certaines pentes y', z', u', ... satisfaisant aux équations (1) et qui permettront à ces points d'atteindre finalement une abscisse x quelconque, tant que, du moins, x, y, z, u, ... se maintiendront dans les limites entre lesquelles les fonctions f_1, f_2, f_3, ... sont réelles et finies.

Donc, *les équations simultanées* (1) *admettent toujours un système d'intégrales générales, de la forme*

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} y = F_1(x, y_0, z_0, u_0, \ldots), \\ z = F_2(x, y_0, z_0, u_0, \ldots), \\ u = F_3(x, y_0, z_0, u_0, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

c'est-à-dire qu'*il existe toujours des fonctions* y, z, u, ... *qui le vérifient et qui, pour* $x = x_0$, *peuvent recevoir des valeurs* y_0, z_0, u_0, ... *choisies à volonté.*

373*. — Unité du système des intégrales générales; possibilité de quelques intégrales singulières et calcul direct de celles-ci.

(Compléments, p. 245*.)

374. — De la forme normale des intégrales : facteurs d'intégrabilité.

Il est clair qu'on pourra, dans les intégrales (2), substituer à y_0, z_0, u_0, ... d'autres constantes arbitraires en même nombre, c_1, c_2, c_3, ..., liées à y_0, z_0, u_0, ... par des relations quelconques, et dont, par suite, y_0, z_0, u_0, ... seront des fonctions déterminées. Les n variables y, z, u, ... dépendront donc des n constantes c_1, c_2, c_3, ..., en même temps que de x; et elles pourront d'ailleurs n'être obtenues par l'intégration que sous forme implicite, c'est-à-dire à l'état de n équations non résolues entre x, y, z, u, ... et c_1, c_2, ..., c_n. De telles relations sont dites des *équations intégrales* du système (1). Si on les résout par rapport aux n constantes c_1, c_2, c_3, ..., elles deviendront de la forme

$$(3)\quad \varphi_1(x, y, z, u, \ldots) = c_1, \quad \varphi_2(x, y, z, u, \ldots) = c_2, \quad \varphi_3(x, y, z, u, \ldots) = c_3, \text{ etc.},$$

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ désignant certaines fonctions de $x, y, z, u, \ldots$. Et elles seront alors les analogues de l'*intégrale normale* $\varphi(x, y) = c$ d'une équation différentielle unique ; car une simple différentiation en éliminera la constante arbitraire que contient chacune d'elles.

Les intégrales du système (1), mises sous cette *forme normale*, peuvent donc être représentées par la formule unique $\varphi(x, y, z, u, \ldots) = c$; et l'on voit qu'il y en a toujours n *distinctes*, c'est-à-dire suffisantes pour déterminer, en fonction des quantités $x, c_1, c_2, \ldots, c_n$, des expressions de $y, z, u, \ldots$ dont on puisse arbitrairement se donner, par un choix convenable de $c_1, c_2, \ldots, c_n$, les valeurs $y_0, z_0, u_0, \ldots$ répondant à la valeur initiale x_0, également arbitraire, de x. Si l'on différentie l'une quelconque de ces équations, écrite $\varphi = c$, en observant d'ailleurs que $y', z', u', \ldots$ sont, d'après les équations proposées, $f_1(x, y, z, \ldots)$, $f_2(x, y, z, \ldots)$, ..., on aura

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d\varphi}{dx} + \dfrac{d\varphi}{dy} f_1 + \dfrac{d\varphi}{dz} f_2 + \dfrac{d\varphi}{du} f_3 + \ldots = 0 \\ \text{ou} \\ -\left(\dfrac{d\varphi}{dy} f_1 + \dfrac{d\varphi}{dz} f_2 + \dfrac{d\varphi}{du} f_3 + \ldots\right) = \dfrac{d\varphi}{dx}. \end{array}\right.$$

Ainsi, il existe, entre les dérivées partielles premières de la fonction φ de $x, y, z, u, \ldots$, et les fonctions données $f_1, f_2, f_3, \ldots$ de ces mêmes variables, des rapports tels, que l'expression de

$$-\left(\frac{d\varphi}{dy} f_1 + \frac{d\varphi}{dz} f_2 + \ldots\right)$$

se confond avec $\dfrac{d\varphi}{dx}$; et, cela, pour toutes les valeurs possibles de $x, y, z, u, \ldots$, puisque chaque valeur de x pourrait, à son tour, être adoptée comme valeur initiale, et que les valeurs correspondantes de $y, z, u, \ldots$ seraient, alors, susceptibles d'être choisies arbitrairement. L'égalité (6) est donc une *identité*.

Cela posé, prenons les équations différentielles (1) sous la forme

$$(7)\qquad dy - f_1\,dx = 0, \qquad dz - f_2\,dx = 0, \qquad du - f_3\,dx = 0, \quad \ldots,$$

et ajoutons-les, après les avoir respectivement multipliées par $\dfrac{d\varphi}{dy}$, $\dfrac{d\varphi}{dz}$, $\dfrac{d\varphi}{du}$, ... Si nous remplaçons, dans les résultats,

$$-\left(\frac{d\varphi}{dy} f_1 + \frac{d\varphi}{dz} f_2 + \ldots\right)$$

par $\frac{d\varphi}{dx}$, la somme des premiers membres deviendra

$$(8)\qquad \frac{d\varphi}{dy}dy + \frac{d\varphi}{dz}dz + \frac{d\varphi}{du}du + \ldots + \frac{d\varphi}{dx}dx \quad \text{ou} \quad d\varphi;$$

en sorte que le résultat, réduit à $d\varphi = 0$, sera immédiatement intégrable et donnera $\varphi =$ const., c'est-à-dire l'une des n intégrales générales prises sous leur forme normale.

Il existe donc toujours, pour un système de n équations différentielles simultanées du premier ordre, résolues par rapport aux différentielles des fonctions inconnues et réduites ensuite, par transposition de termes, à avoir leurs seconds membres nuls, n groupes distincts de facteurs d'intégrabilité (fonction de x, y, z, u, ...), tels que, si l'on multiplie les équations proposées par ceux, $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dz}$, $\frac{d\varphi}{du}$, ..., de l'un quelconque des groupes, puis qu'on fasse la somme des résultats, l'équation obtenue s'intègre immédiatement : car elle a pour premier membre une différentielle totale, intégrable par des quadratures et conduisant à l'une des intégrales normales $\varphi = c$ du système proposé.

375*. — Propriété qu'ont les solutions singulières et, sous certaines conditions, les solutions asymptotes, de rendre infinis un ou plusieurs de ces facteurs.

(Compléments, p. 247*.)

376. — Réduction d'un système d'équations différentielles d'ordre quelconque à un système d'un nombre plus grand d'équations du premier ordre.

On peut toujours ramener un système d'équations différentielles à être du premier ordre, en y considérant comme autant de fonctions inconnues distinctes toutes les dérivées qui y paraissent, sauf la plus élevée de chacune des fonctions cherchées, et en déterminant les inconnues auxiliaires ainsi introduites par les relations $\left(\text{comme } y' = \frac{dy}{dx},\ z' = \frac{dz}{dx}, \ldots\right)$ qui, justement, les définissent en tant que dérivées soit les unes des autres, soit des inconnues principales demandées y, z, u, ... On obtient ainsi un système plus nombreux d'équations simultanées ; mais, évidemment, ce système est du premier ordre.

377. — Cas particulier d'une seule équation différentielle d'ordre supérieur : intégrale générale; facteurs d'intégrabilité; intégrales de divers ordres.

Soit, par exemple, une équation différentielle d'ordre n, supposée résolue par rapport à la dérivée la plus élevée,

$$(9)\qquad \begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}), \\ \text{ou} \\ \dfrac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, \dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2 y}{dx^2}, \ldots, \dfrac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right), \end{cases}$$

entre une variable indépendante x, sa fonction y et les n premières dérivées de celle-ci. En regardant comme des fonctions distinctes les $n-1$ dérivées $y', y'', y''', \ldots, y^{(n-1)}$, intermédiaires entre la fonction y et sa dérivée $n^{\text{ième}}$, $y^{(n)}$, que nous écrirons $\dfrac{dy^{(n-1)}}{dx}$, nous aurons le système de n équations simultanées du premier ordre,

$$(10)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y', \quad \dfrac{dy'}{dx} = y'', \quad \ldots, \quad \dfrac{dy^{(n-2)}}{dx} = y^{(n-1)}, \\ \qquad \dfrac{dy^{(n-1)}}{dx} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}), \end{cases}$$

entre la variable indépendante x et les n fonctions $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ de cette variable ; et il est évident que ce système (10) a précisément la même signification que l'équation proposée (9).

On voit que l'intégrale générale déterminera y et, par suite, y', y'', $\ldots$, $y^{(n-1)}$, en fonction de x et des *valeurs initiales* arbitraires $y_0, y'_0, y''_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$, que prendront toutes ces quantités pour $x = x_0$. Donc, ***l'intégrale générale d'une équation différentielle du $n^{\text{ième}}$ ordre contient n constantes arbitraires, telles qu'on peut se donner à volonté les valeurs initiales de la fonction et de ses $n-1$ premières dérivées.***

Chacune des n intégrales normales, distinctes, du système (10) étant de la forme $\varphi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) = c$, les facteurs d'intégrabilité correspondants sont $\dfrac{d\varphi}{dy}, \dfrac{d\varphi}{dy'}, \dfrac{d\varphi}{dy^{(n-1)}}$; et, si l'on multiplie par ceux-ci les équations (10), mises sous la forme

$$(11)\qquad \begin{cases} dy - y'\,dx = 0, \quad dy' - y''\,dx = 0, \quad \ldots, \\ dy^{(n-2)} - y^{(n-1)}\,dx = 0, \quad dy^{(n-1)} - f\,dx = 0, \end{cases}$$

puis, qu'on ajoute les résultats, la somme des premiers membres éga-

lera, comme on sait, la différentielle totale exacte de la fonction φ. On aura ainsi

$$\frac{d\varphi}{dy}(dy - y'dx) + \frac{d\varphi}{dy'}(dy' - y''dx) + \ldots + \frac{d\varphi}{dy^{(n-1)}}(dy^{(n-1)} - f dx) = d\varphi,$$

c'est-à-dire, plus simplement, en tenant compte de ce fait que y', y'', ... désignent les dérivées successives de y et que, par suite, les expressions $dy - y'dx$, $dy' - y''dx$, ..., $dy^{(n-2)} - y^{(n-1)}dx$ sont identiquement nulles,

$$(12) \qquad \frac{d\varphi}{dy^{(n-1)}}(dy^{(n-1)} - f\,dx) = d\varphi.$$

Il existe donc, pour toute équation différentielle d'ordre n mise sous la forme $dy^{(n-1)} - f\,dx = 0$, *un facteur*, $\frac{d\varphi}{dy^{(n-1)}}$, *fonction de* $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$, *et même n facteurs analogues distincts (un pour chaque intégrale normale* $\varphi = \text{const.}$), *qui rendent le premier membre de cette équation la différentielle totale de certaines fonctions* φ *de* $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$.

Quand un de ces facteurs est connu et qu'on l'applique, l'équation devient exactement intégrable une fois ; et l'on obtient, en intégrant en effet, une équation différentielle d'ordre $n-1$, savoir

$$\varphi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) = c.$$

Celle-ci est dite une *intégrale générale première* de la proposée. Si l'on peut la traiter comme la proposée, c'est-à-dire l'intégrer elle-même une fois, on aura, avec deux constantes arbitraires, une nouvelle intégrale, appelée *intégrale deuxième* de la proposée. En continuant de même, on arrivera, après n intégrations, à l'*équation intégrale $n^{\text{ième}}$ ou du $n^{\text{ième}}$ ordre*, qui contiendra x, y et les n constantes arbitraires successivement introduites. Celle-ci sera l'*intégrale générale* de la proposée ; car, résolue par rapport à y, elle donnera la valeur générale de cette fonction, avec toutes les constantes arbitraires nécessaires pour pouvoir disposer à volonté de sa valeur initiale y_0 et de celles, $y'_0, y''_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$, de ses $n-1$ premières dérivées.

378*. — Sur les solutions singulières des équations différentielles d'ordre supérieur.

(Compléments, p. 248*.)

379. — Équation différentielle d'ordre supérieur propre à chacune des fonctions que définissent des équations simultanées du premier ordre : intégration du système, de proche en proche, par l'emploi de la série de Taylor.

Si une équation différentielle d'ordre n peut être remplacée par n équations du premier ordre, à l'inverse, *un système de n équations du premier ordre*, comme, par exemple, le système (1) [p. 189], *conduit, par l'élimination de $n-1$ des fonctions inconnues, à une équation différentielle d'ordre n entre la variable indépendante x et la fonction inconnue restante.*

Pour le démontrer, observons d'abord que les équations proposées (1) permettent d'obtenir, en fonction des valeurs actuelles de x, y, z, u, ..., non seulement les dérivées premières de y, z, u, ..., mais encore leurs dérivées d'un ordre quelconque. En effet, la différentiation de la première (1), par exemple, donnera

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} y'' &= \frac{df_1}{dx} + \frac{df_1}{dy}y' + \frac{df_1}{dz}z' + \frac{df_1}{du}u' + \ldots \\ &= \frac{df_1}{dx} + \frac{df_1}{dy}f_1 + \frac{df_1}{dz}f_2 + \frac{df_1}{du}f_3 + \ldots, \end{aligned}\right.$$

expression de y'', qui est, comme y', une fonction connue de x, y, z, u, ..., et qui servira elle-même de point de départ pour obtenir successivement y''', y^{iv}, ...

Si donc on évalue, par exemple, y', y'', y''', ..., $y^{(n)}$ en fonction de x, y, z, u, ..., on aura, entre ces dérivées et x, y, z, u, ..., des relations au nombre de n ; et il suffira de les combiner de manière à en éliminer les $n-1$ variables z, u, ..., pour obtenir finalement une équation entre x, y, y', y'', ..., $y^{(n)}$, c'est-à-dire une équation du $n^{\text{ième}}$ ordre en y. L'intégration de cette équation fera connaître séparément y, du moins entre certaines limites, en fonction de x et des valeurs initiales, $y_0, y'_0, y''_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$, tant de la quantité y que de ses $n-1$ premières dérivées y', y'', ..., $y^{(n-1)}$, dérivées évaluables d'ailleurs, pour $x = x_0$, en fonction des vraies constantes arbitraires y_0, z_0, u_0, ... de la question, grâce aux formules, comme $y' = f_1$ et comme (14), de ces dérivées de y.

On remarquera que les expressions de y, z, u, ..., ou plutôt leurs accroissements successifs pour de petits accroissements h de x, pourront généralement se calculer de proche en proche par la série de Taylor, à un degré aussi élevé qu'on voudra d'approximation, en

fonction des valeurs initiales y_0, z_0, u_0, ... de toutes les fonctions cherchées. En effet, les coefficients qui entreront, par exemple, dans le développement d'un premier accroissement de y seront, à des facteurs constants près, les valeurs primitives, y'_0, y''_0, y'''_0, ..., des dérivées de y, valeurs s'exprimant toutes directement, comme on vient de voir, en fonction de celles de x, y, z, u, ..., qui constituent des données immédiates de la question. On aura ainsi y, z, u, ... pour toutes les valeurs de x assez voisines de x_0, jusqu'à une certaine valeur, x_0+h, au delà de laquelle on jugera que l'approximation atteinte par les développements obtenus risquerait de devenir insuffisante, et qui, adoptée dès lors comme nouvelle valeur initiale, ou comme nouveau point de départ où seront encore connues (par les séries précédentes) les quantités y, z, u, ..., permettra d'obtenir de même leurs valeurs ultérieures; et ainsi de suite, tant que ne deviendront pas infinies ou discontinues les dérivées employées dans les développements.

380. — De quelques cas où l'on trouve immédiatement les facteurs d'intégrabilité, pour une équation différentielle d'ordre supérieur.

Les cas où l'on sait trouver d'une manière immédiate les facteurs d'intégrabilité sont, naturellement, encore plus rares pour les équations différentielles d'ordre supérieur que pour celles du premier ordre. Voici les principaux.

1° Le plus simple est celui où l'équation ne contient que la variable indépendante x et une dérivée de la fonction inconnue y. Alors l'équation, résolue par rapport à cette dérivée, devient de la forme $y^{(n)}=f(x)$, ou $dy^{(n-1)}=f(x)\,dx$. Elle est immédiatement intégrable : autrement dit, elle admet le facteur d'intégrabilité 1. Intégrée une première fois, elle donne $y^{(n-1)}=\int f(x)\,dx+\text{const.}$, c'est-à-dire qu'elle devient de l'ordre $n-1$, tout en conservant sa forme première. On pourra donc l'intégrer encore, et continuer de même jusqu'à ce que n intégrations successives aient permis de remonter à y.

Quand l'équation n'est pas aisée à résoudre par rapport à $y^{(n)}$, mais l'est par rapport à x ou prend facilement la forme $x=\varphi(y^{(n)})$, la quantité $y^{(n)}$ se trouve toute désignée, dans la question, pour le rôle de variable auxiliaire propre à faciliter l'expression des dérivées de moins en moins élevées $y^{(n-1)}$, $y^{(n-2)}$, ..., jusqu'à y. En désignant par u, pour plus de simplicité, cette variable auxiliaire $y^{(n)}$, il vient

d'abord

$$dy^{(n-1)} = y^{(n)}\,dx = y^{(n)}\,d\varphi(y^{(n)}) = u\,d\varphi(u) = u\varphi'(u)\,du,$$

et ensuite, de même,

$$\begin{cases} dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}\,dx = y^{(n-1)}\,\varphi'(u)\,du, \\ dy^{(n-3)} = y^{(n-2)}\varphi'(u)\,du, \quad \ldots, \quad dy = y'\varphi'(u)\,du. \end{cases}$$

Des intégrations successives, dont chacune implique une constante arbitraire, donnent donc

$$\begin{cases} y^{(n-1)} = \int u\varphi'(u)\,du, \\ y^{(n-2)} = \int \varphi'(u)\,du.y^{(n-1)} = \int \varphi'(u)\,du \int u\varphi'(u)\,du, \quad \ldots, \\ \quad y = \int \varphi'(u)\,du \int \varphi'(u)\,du \int \ldots \int \varphi'(u)\,du \int u\varphi'(u)\,du; \end{cases}$$

et l'expression de y, en u, ainsi formée, a bien le nombre voulu, n, de constantes arbitraires. Enfin, pour chaque système de valeurs de ces constantes, la fonction cherchée y de x se construit (à moins que u ne puisse être éliminé et y s'obtenir ainsi directement en x) par le rapprochement des valeurs de y et x qui résultent, quand u varie, de cette expression de y et de celle, $\varphi(u)$, de x.

2° Vient, en deuxième lieu, le cas où l'équation ne contient pas x, ni y, mais seulement deux dérivées consécutives de y. Résolue par rapport à la plus haute de ces dérivées, elle sera de la forme

$$y^{(n)} = f(y^{(n-1)}) \qquad \text{ou} \qquad \frac{dy^{(n-1)}}{dx} = f(y^{(n-1)}).$$

On voit qu'en y regardant $y^{(n-1)}$ comme la fonction cherchée, elle devient l'équation du premier ordre $dy^{(n-1)} = f(y^{(n-1)})\,dx$ et a pour facteur d'intégrabilité l'inverse de $f(y^{(n-1)})$. Une première intégration donne, en appelant c la constante arbitraire introduite,

$$\int \frac{dy^{(n-1)}}{f(y^{(n-1)})} = x - c,$$

équation différentielle de l'ordre $n-1$ et qui, rentrant dans le type précédent, se traitera par l'un des deux procédés indiqués ci-dessus.

3° Considérons encore une forme d'équations très importante en Mécanique, où, le temps étant la variable indépendante x, il arrive souvent que la dérivée de la vitesse, c'est-à-dire la dérivée seconde de l'espace parcouru y, dépend directement de la situation du mobile, que définit la longueur y elle-même. Ainsi, les équations dont il s'agit contiendront uniquement la fonction y et sa dérivée seconde, ou, pour plus de généralité, deux dérivées de y non consécutives, savoir

$y^{(n-2)}$ et $y^{(n)}$. Résolue par rapport à la dérivée la plus élevée, elle sera, en appelant u la dérivée la moins élevée, de la forme $u'=f(u)$. Écrivons-la $du'=f(u)\,dx$ et son facteur intégrant sera $2u'$. En effet, multipliée par $2u'$, elle deviendra $d(u'^2)=2f(u)u'dx=2f(u)\,du$, ou, intégrée, $u'^2=2\int f(u)\,du+c$. On en tire donc

$$u'=\pm\sqrt{2\int f(u)\,du+c},$$

équation différentielle de l'ordre $n-1$ comprise dans le type précédent; car elle ne contient que les deux dérivées consécutives u et u' de y, savoir $y^{(n-2)}$ et $y^{(n-1)}$, par rapport à la plus élevée desquelles elle se trouve même résolue.

381. — Cas les plus simples d'abaissement de l'ordre d'une équation différentielle.

On peut encore, parfois, intégrer une équation d'ordre supérieur en commençant par *abaisser* son ordre, c'est-à-dire par le diminuer d'une ou de plusieurs unités, au moyen de certains changements, soit de la variable, soit de la fonction ; ce qui, en quelque sorte, répartit, pour l'atténuer, la difficulté du problème entre l'intégration de l'équation obtenue et le passage des variables ou fonctions auxiliaires à celles. x et y, qui sont données.

Par exemple, quand l'équation proposée ne contient pas y, mais contient seulement, avec x, les dérivées de y à partir de celle d'un certain ordre p, l'adoption de $y^{(p)}$ comme fonction inconnue, à la place de y, abaisse évidemment l'ordre de p unités; et, si l'on peut, en intégrant l'équation ainsi abaissée, déterminer $y^{(p)}$, les p intégrations qui resteront à effectuer seront immédiatement réductibles à des quadratures, comme nous venons de le voir sur l'équation $y^{(n)}=f(y^{(n-1)})$, que l'adoption provisoire de $y^{(n-1)}$ en qualité de fonction inconnue avait justement abaissée au premier ordre.

Quand, au contraire, l'équation proposée contient y avec ses n premières dérivées, mais ne contient pas x, l'ordre s'abaisse d'une unité en prenant y pour variable indépendante et la dérivée y' pour fonction. Alors, en effet, les dérivées suivantes y'', y''', ..., transformées au moyen de la formule symbolique évidente

$$\frac{d}{dx}=\frac{dy}{dx}\frac{d}{dy}=y'\frac{d}{dy},$$

deviennent respectivement

$$(15)\quad y''=y'\frac{dy'}{dy},\qquad y'''=y'\frac{d}{dy}\left(y'\frac{dy'}{dy}\right)=y'^2\frac{d^2y'}{dy^2}+y'\left(\frac{dy'}{dy}\right)^2,\quad \ldots;$$

et chacune s'exprime au moyen de dérivées de y' qui sont d'un ordre moindre, en sorte que l'équation se trouve bien réduite à l'ordre $n-1$. Si donc on sait l'intégrer, la valeur de y' s'obtiendra en fonction de y; ce qui équivaudra à une équation de la forme $y'=f(y)$, ayant pour intégrale $\int \frac{dy}{f(y)} = x + \text{const.}$

382*. — Exemples : Courbe plane ayant sa courbure fonction soit de la distance à une droite fixe, soit de la normale; courbe élastique.

(Compléments, p. 249*.)

383*. — Autres cas d'abaissement, spéciaux à des équations présentant certains genres d'homogénéité.

(Compléments, p. 254*.)

Abaissement de l'équation binôme du second ordre (note).

(Compléments, p. 255*.)

384*. — Exemple : abaissement de l'ordre d'une équation linéaire sans second membre; réduction de l'équation non linéaire de Riccati à une telle équation linéaire, mais du second ordre.

(Compléments, p. 256*.)

385*. — Réduction, aux quadratures, de l'intégration de l'équation linéaire homogène du second ordre dont une solution particulière est donnée; abaissement de l'ordre de toute équation linéaire, avec conservation de la forme linéaire, quand on connaît une ou plusieurs intégrales particulières de l'équation analogue sans second membre.

(Compléments, p. 257*.)

TRENTE-HUITIÈME LEÇON.

THÉORIE GÉNÉRALE DES ÉQUATIONS LINÉAIRES; MÉTHODE DE LA VARIATION DES CONSTANTES POUR L'INTÉGRATION D'ÉQUATIONS MÊME NON LINÉAIRES.

386. — Des équations linéaires : idée de leur importance dans l'étude des phénomènes naturels.

Bornons-nous désormais, presque exclusivement, dans notre étude des équations différentielles simultanées ou d'ordre supérieur, à celles qui sont *linéaires*, c'est-à-dire qui, réduites à un système du premier ordre et résolues par rapport aux dérivées des fonctions inconnues y, z, u, ..., peuvent être, finalement, mises sous la forme

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + A_1 y + B_1 z + C_1 u + \ldots = F_1, \\ \dfrac{dz}{dx} + A_2 y + B_2 z + C_2 u + \ldots = F_2, \\ \dfrac{du}{dx} + A_3 y + B_3 z + C_3 u + \ldots = F_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

A_1, B_1, C_1, ..., F_1, A_2, B_2, C_2, ..., F_2, etc. désignant des fonctions explicites quelconques de la variable indépendante x seule.

Ces équations ont une grande importance, non seulement parce que leur simplicité relative nous met à même de les mieux connaître, mais encore et surtout parce qu'elles régissent une immense et intéressante catégorie de phénomènes naturels, savoir tous ceux qui consistent en de *petits* changements de situation ou d'état, comme sont les oscillations des fluides, les vibrations et déformations élastiques des solides, les ondulations lumineuses, les échanges modérés de chaleur entre des corps voisins ou entre les différentes parties d'un même corps ou d'un même système de corps, et les variations correspondantes de la température, etc.

En effet, dans l'étude de tous ces phénomènes, on peut regarder les corps comme composés de particules plus ou moins nombreuses, dont chacune a sa situation, sa vitesse, sa température, etc., exprimées par une ou plusieurs quantités, variables d'un instant à l'autre, c'est-à-dire

fonctions du temps, et en nombre au moins égal à celui des particules. Or, si nous désignons ici par x le temps et par y, z, u, ... ces diverses quantités, ou plutôt leurs petites variations de part et d'autre de certaines valeurs moyennes fixes, les lois physiques détermineront les dérivées de y, z, u, ..., à chaque instant x, en fonction de leurs valeurs actuelles seules, quand le système matériel étudié ne sera influencé par aucun autre (p. 178). Et elles les détermineront encore. évidemment, en fonction des mêmes variables, quand le système matériel proposé supportera des actions extérieures ne dépendant que de ces variables ou, autrement dit, se trouvera influencé par un autre système matériel, mais qui aurait son état lié au sien, c'est-à-dire défini également par les variables y, z, u, ... Enfin, les mêmes dérivées seront des fonctions explicites, tout à la fois, de y, z, u, ..., et aussi de x, dans le cas plus général où l'état du système en relation avec le proposé ne se trouvera pas entièrement solidaire du sien; car alors les actions extérieures à considérer devront être connues à chaque instant, c'est-à-dire *directement* données en fonction du temps x, sans quoi le problème ne serait pas défini. Donc, conformément aux indications du n° 359 (p. 178), les dérivées $\frac{d(y, z, u, \ldots)}{dx}$ égaleront des fonctions déterminées de x, y, z, u, ... Cela posé, tant que les changements d'état dont il s'agit seront fort petits, ou, autrement dit, tant que y, z, u, ... ne recevront que de faibles valeurs absolues, on pourra, en thèse générale, exprimer les petits changements de ces fonctions explicites de y, z, u, ..., à la manière de différentielles totales (t. I, p. 83), c'est-à-dire les réduire, sauf écarts négligeables de l'ordre des carrés et produits de leurs variables, à des termes du premier degré en y, z, u, ...; ce qui donnera évidemment aux équations différentielles du problème la forme linéaire (1), avec des seconds membres F_1, F_2, ... *finis*, c'est-à-dire beaucoup plus grands, d'ordinaire, que $A_1 y$, $B_1 z$, ...

On observera même que, si le système considéré n'est soumis qu'aux influences mutuelles de ses diverses parties, ou encore l'est, plus généralement, à des actions extérieures, mais ne variant, comme il a été dit, qu'avec son état (défini par y, z, u, ...), le temps x n'entrera pas dans les fonctions linéaires dont il s'agit; de sorte que les coefficients A_1, B_1, C_1, ..., A_2, ..., et les seconds membres F_1, F_2, ..., se réduiront à des constantes. Or, le plus souvent, il arrivera que même les influences extérieures fonctions explicites de x seront assez modérées pour ne modifier les termes *déjà petits* $A_1 y$, $B_1 z$, ... que de fractions relativement faibles et dès lors négligeables de leurs valeurs.

ou pour n'ajouter des parties sensibles de l'ordre de ces termes, mais fonctions explicites de x, qu'aux seconds membres, *finis*, F_1, F_2, ...

Ainsi, les équations linéaires propres à exprimer les petits changements d'état physique d'un système de corps auront, en général, leurs coefficients constants et leurs seconds membres soit constants, soit fonctions de x, suivant que les influences extérieures agissant sur le système se trouveront elles-mêmes constantes ou variables.

387. — Cas d'équations linéaires sans seconds membres : formation d'intégrales soit par réduction ou agrandissement proportionnels, soit par addition d'autres intégrales.

Considérons d'abord le cas où les équations (1) sont, comme on dit, *sans seconds membres*, ou *homogènes*, c'est-à-dire ne contiennent pas de terme indépendant de y, z, u, ... Alors le système (1), réduit à

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + A_1 y + B_1 z + C_1 u + \ldots = 0, \\ \dfrac{dz}{dx} + A_2 y + B_2 z + C_2 u + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

jouit de deux propriétés capitales.

La première consiste en ce que, *si certaines fonctions, mises à la place de y, z, u, ..., le vérifient, les produits de ces fonctions par une même constante arbitraire le vérifieront également*. En effet, multiplions les équations (2) par une telle constante c, et il viendra

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{d(cy)}{dx} + A_1(cy) + B_1(cz) + C_1(cu) + \ldots = 0, \\ \dfrac{d(cz)}{dx} + A_2(cy) + B_2(cz) + C_2(cu) + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \end{cases}$$

ce qui démontre bien le fait énoncé.

La seconde propriété, tout aussi évidente, consiste en ce que, *si plusieurs systèmes de fonctions*, que j'appellerai, les premières, y_1, z_1, u_1, ..., les deuxièmes, y_2, z_2, u_2, ..., les suivantes, y_3, z_3, u_3, ..., etc., *satisfont séparément aux équations proposées, les sommes respectives de ces fonctions, savoir*

$$(4)\qquad \begin{cases} y = y_1 + y_2 + y_3 + \ldots, \\ z = z_1 + z_2 + z_3 + \ldots, \\ u = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

les vérifieront également ou constitueront aussi des intégrales y, z,

$u, \ldots$ Il suffit, pour le reconnaître, d'ajouter ensemble les relations que l'on obtient en mettant successivement $y_1, z_1, u_1, \ldots; y_2, z_2, u_2 \ldots; y_3, z_3, u_3, \ldots$; etc., à la place de $y, z, u, \ldots$, dans l'une quelconque des équations (2), dans la première par exemple. Il vient, de la sorte,

$$(5)\quad \frac{d(y_1+y_2+y_3+\ldots)}{dx} + A_1(y_1+y_2+y_3+\ldots) + B_1(z_1+z_2+z_3+\ldots) + \ldots = 0;$$

ce qui fait bien voir que les valeurs (4) de $y, z, u, \ldots$ satisfont à l'équation considérée et vérifieraient de même les autres (2).

388. — Conséquences de ces propriétés en Philosophie naturelle : principe de Daniel Bernoulli, sur la superposition des petits effets dans les phénomènes dynamiques.

Les deux propriétés précédentes ont une haute portée dans *la théorie des petits changements physiques produits de part et d'autre d'un état dit permanent ou d'équilibre*, pour lequel $y, z, u, \ldots$ s'annuleraient à toutes les époques x; ce qui, impliquant la possibilité d'un tel état fixe où sont réduits identiquement à zéro les premiers membres de (1), exige bien l'annulation des seconds membres $F_1, F_2, F_3, \ldots$, mais suppose aussi, par le fait même, l'absence d'actions extérieures fonctions explicites du temps x.

La première, exprimée par les équations (3), signifie que, *si l'on considère deux systèmes matériels ayant leurs changements d'état déterminés par les mêmes équations linéaires, et si, dans l'un d'eux, les valeurs initiales de $y, z, u, \ldots$ se trouvent être proportionnelles à ce qu'elles sont dans l'autre,* ou égalent les produits respectifs de celles-ci par une constante arbitraire c, *la même proportionnalité se maintiendra indéfiniment;* en sorte que les deux phénomènes étudiés resteront *semblables* l'un à l'autre durant toute leur évolution.

La seconde propriété, représentée par (5) en ce qui concerne la fonction y, exprime que, *étant donnés plusieurs systèmes matériels régis par les mêmes équations linéaires, si, dans l'un d'eux, les valeurs initiales des quantités $y, z, u, \ldots$ égalent les sommes respectives de ce qu'elles sont dans les autres, ces quantités $y, z, u, \ldots$ ne cesseront, à aucune époque, d'être, dans le premier système, les sommes de ce qu'elles seront au même instant dans les autres systèmes.* Ainsi, les phénomènes qu'offriront ces derniers se produiront *tous à la fois* dans le premier système, *en s'y superposant simplement,* c'est-à-dire sans que chaque phénomène cesse d'avoir lieu, pour son propre compte, comme s'il était seul.

Cette grande loi, découverte par Daniel Bernoulli en 1753, et dont la précédente, de proportionnalité, se déduirait en superposant des états égaux, est une des plus importantes de la Philosophie naturelle : on l'appelle le *principe de la superposition des petits mouvements ou des petits effets*. C'est elle qui explique, par exemple, comment de légers ébranlements produits en différentes régions de l'espace ou même en une seule région, tels que divers systèmes d'ondes à la surface d'un liquide, ou divers systèmes de vibrations soit sonores, dans les corps, soit lumineuses ou calorifiques, dans l'éther impondérable, etc., se propagent et se croisent sans se détruire mutuellement, mais de manière que chaque système conserve ou puisse du moins reprendre à l'occasion son individualité, et affecter ainsi séparément nos organes. Sans cette loi, nous ne pourrions ni distinguer, dans un mélange de sons, ceux qui proviennent d'une voix ou d'un corps connus, ni percevoir, dans la quantité prodigieuse des rayons lumineux traversant en tous sens un espace éclairé, ceux qui, envoyés par chaque objet, nous en fournissent l'image; et nos sensations les plus distinctes, celles de la vue et de l'ouïe, perdraient leur netteté, qu'elles doivent aussi, il est vrai (comme on verra plus loin, n° 460*), à la *propagation sans diffusion* des petits ébranlements émanés d'un centre dans les milieux *élastiques* à une ou trois dimensions, propriété résultant d'une *certaine homogénéité* des équations linéaires de ces mouvements.

La loi de superposition et, par suite, celle de proportionnalité qui s'y rattache, ne s'observeraient généralement plus si les variations d'état physique mesurées par y, z, u, ... devenaient assez grandes pour rendre sensibles, dans les équations des phénomènes, les erreurs du second ordre ou au-dessus (c'est-à-dire comparables aux puissances ou aux produits y^2, y^3, ..., yz, ...) que suppose négligeables la réduction, à la forme linéaire, de ces équations; car alors celles-ci pourraient contenir, par exemple, des termes en y^2, et le dédoublement de y en deux parties y_1, y_2 entraînerait la décomposition de ces termes non plus seulement en deux analogues, ou affectés respectivement de y_1^2 et de y_2^2, mais en trois, dont l'un, affecté de $2y_1y_2$, ne correspondrait ni à y_1, ni à y_2, pris seuls.

Ainsi les applications du principe de D. Bernoulli au monde dans lequel nous vivons ne sont si fréquentes qu'à cause même de la *stabilité* assez grande atteinte par l'état physique de ce monde et indispensable à la conservation de nos organismes, stabilité ne permettant le plus souvent que de légères ruptures d'équilibre, ou de minimes quoique innombrables écarts de part et d'autre d'un état moyen presque permanent. Ces petits écarts y, z, u..... sans troubler l'ordre ou, pour

ainsi dire, le repos de l'ensemble, suffisent pour en diversifier à l'infini l'aspect; et c'est, comme on le voit, par des phénomènes dont certaines lois au moins nous sont accessibles, vu leur simplicité proportionnée à la faiblesse de nos intelligences. L'intérêt, la beauté que nous trouvons à ces phénomènes, justement parce qu'ils nous paraissent à la fois *divers* et *simples,* ou *ordonnés* dans leur *multitude*, tiennent donc, en grande partie, à la forme linéaire de leurs équations, sans laquelle ils ne nous offriraient, le plus souvent, qu'un inextricable chaos.

389. — Réduction des équations linéaires complètes aux équations sans seconds membres, quand on connait l'une quelconque de leurs intégrales.

Passons maintenant aux équations linéaires complètes (1). Si l'on en connaît une intégrale particulière ou, autrement dit, si l'on a pu former certaines fonctions Y, Z, U,... de x qui, mises dans (1) à la place de y, z, u,.... donnent

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{dY}{dx} + A_1 Y + B_1 Z + C_1 U + \ldots = F_1, \\ \dfrac{dZ}{dx} + A_2 Y + B_2 Z + C_2 U + \ldots = F_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

il viendra, en retranchant celles-ci de (1),

$$(7)\quad \frac{d(y-Y)}{dx} + A_1(y-Y) + B_1(z-Z) + C_1(u-U) + \ldots = 0, \text{ etc.};$$

de sorte que les excédents, $y - Y$, $z - Z$, $u - U$,..., des valeurs générales y, z, u,... des fonctions inconnues sur leurs valeurs particulières Y, Z, U,..., seront régis par les équations (2), c'est-à-dire par les proposées privées de leurs seconds membres. Donc, *les intégrales générales des équations linéaires avec seconds membres s'obtiennent en ajoutant ou superposant un système quelconque d'intégrales particulières de ces équations aux intégrales générales qu'elles admettraient si l'on annulait leurs seconds membres.*

Observons que les relations (6) seront satisfaites par telles fonctions Y, Z, U,... qu'on voudra, si l'on donne chaque fois, pour seconds membres F_1, F_2, F_3,.... précisément les sommes

$$\frac{dY}{dx} + A_1 Y + B_1 Z + \ldots, \qquad \frac{dZ}{dx} + A_2 Y + B_2 Z + \ldots, \text{ etc.}$$

D'ailleurs, celles-ci se trouvant du premier degré par rapport à Y, Z,

U,... et à leurs dérivées premières, les valeurs de F_1, F_2, F_3,... seront multipliées par un facteur constant c, si l'on multiplie Y, Z, U...., par ce facteur; d'où il suit que tout système de fonctions Y, Z, U,..., satisfaisant aux équations (6), continue, pourvu qu'on le multiplie par c, à les vérifier quand les seconds membres deviennent cF_1, cF_2,.... De même, les valeurs de F_1, ou de F_2,..., s'ajouteront simplement entre elles si l'on fait les sommes respectives de plusieurs systèmes de valeurs de Y, Z, U,...; et, par suite, *vice versa,* la décomposition de F_1, F_2, F_3,... en parties permettra de former une solution particulière, Y, Z, U...., en ajoutant des solutions particulières propres aux cas où F_1, F_2,... se réduiraient soit aux premières, soit aux secondes, etc., de ces parties. Bref, *les deux principes de proportionnalité et de superposition simple, que nous avons reconnus régir les intégrales d'équations linéaires sans seconds membres, pour des valeurs initiales des fonctions y, z, u,..., composées par réduction proportionnelle ou par addition d'autres valeurs initiales, s'appliquent également au mode de formation d'une intégrale particulière des équations avec seconds membres, quand ceux-ci reçoivent successivement diverses expressions proportionnelles les unes aux autres ou égales, les unes. aux sommes respectives des autres.*

390. — Extension de la loi de superposition des petits effets aux phénomènes statiques ou d'état permanent et à leur combinaison avec les phénomènes dynamiques.

Lorsqu'il s'agit d'un système matériel éprouvant de petits changements d'état physique, mesurés par y, z, u,..., sous l'action de causes étrangères de grandeur modérée, celles-ci (égales à zéro quand leurs effets y, z, u,... restent nuls) sont représentées uniquement par les valeurs que prennent les seconds membres F_1, F_2, F_3,..., dans les équations (1) à coefficients alors constants. Or, si ces causes étrangères deviennent invariables, il existera une solution particulière exceptionnellement simple et importante, savoir, celle où y, z, u,... seront, comme les coefficients et comme les seconds membres, indépendantes du temps x, et donneront ainsi $\frac{d(y,\,z,\,u,\ldots)}{dx}=0$ ou réduiront les équations différentielles (1) à un simple système de n équations algébriques du premier degré à n inconnues y, z, u,....

L'état représenté par cette solution s'appelle *état permanent* ou *d'équilibre,* et, comme la multiplication par c des valeurs de y, z, u,..., qui lui correspondent, ou l'addition respective de ces systèmes de valeurs pour plusieurs systèmes de valeurs de F_1, F_2, F_3,..., four-

nissent évidemment des résultats encore indépendants de x, il est clair que les principes de simple proportionnalité et de superposition s'y appliquent. Ces principes règlent donc les états permanents produits dans divers systèmes matériels, identiques de nature, mais soumis à des actions extérieures, soit proportionnelles dans plusieurs systèmes (quant à leurs expressions F_1, F_2, $F_3, \ldots$), soit égales dans l'un d'eux, à leurs sommes respectives dans les autres : leurs effets permanents, définis par y, z, $u, \ldots$, seront ainsi ou proportionnels au rapport suivant lequel varieront F_1, F_2, $F_3, \ldots$ d'un système à l'autre, ou simplement cumulés dans le système soumis à la fois aux influences extérieures agissant sur tous les autres. Alors il y aura superposition, non plus de mouvements, mais, encore, de petits effets. Et, vu d'ailleurs, dans le cas général d'états variables ou fonction du temps x, la réduction des équations avec seconds membres aux équations sans seconds membres par la simple substitution, aux écarts y, z, $u, \ldots$, de leurs excédents sur leurs valeurs d'état permanent, *les phénomènes dynamiques se succéderont*, si on les exprime par ces excédents, c'est-à-dire *si l'on compte les écarts à partir de l'état permanent considéré, absolument comme l'auraient fait des phénomènes pareils* exprimés par y, z, $u, \ldots$, ou *évalués à partir de l'état de repos primitif, dans le système soustrait aux influences étrangères*, c'est-à-dire régi par les équations sans seconds membres.

391. — Forme des intégrales générales, pour les équations linéaires sans seconds membres.

Les lois de proportionnalité et de superposition conduisent immédiatement à la forme des intégrales générales des équations linéaires, privées de seconds membres.

Appelons respectivement y_1, z_1, $u_1, \ldots$; y_2, z_2, $u_2, \ldots$; $\ldots$; y_n, z_n, $u_n, \ldots$, n systèmes de valeurs, fonctions de x, pour les n quantités inconnues y, z, $u, \ldots$, c'est-à-dire n intégrales particulières.

Nous verrons plus loin comment on peut, dans les catégories les plus intéressantes d'équations linéaires, obtenir ces n systèmes de valeurs ; mais nous admettrons ici qu'on les connaisse. Multiplions-les respectivement par n constantes arbitraires $c_1, c_2, \ldots, c_n$; et puis ajoutons. Il viendra les nouvelles intégrales

$$(8)\qquad \left\{\begin{array}{l} y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n, \\ z = c_1 z_1 + c_2 z_2 + \ldots + c_n z_n, \\ u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \ldots + c_n u_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Or, si l'on considère les n équations (8), qui sont du premier degré soit en $c_1, c_2, \ldots, c_n$, soit en $y, z, u, \ldots$, et si on les résout par rapport à $c_1, c_2, \ldots, c_n$, le déterminant de ce système d'équations (ou dénominateur commun des expressions trouvées pour $c_1, c_2, \ldots, c_n$) ne s'annulera pas à l'époque initiale *quelconque* $x = x_0$, pourvu du moins qu'on ait évité de prendre des intégrales particulières $y_1, z_1, u_1, \ldots, y_2, z_2, u_2, \ldots$, etc., vérifiant identiquement la relation qu'exprime son égalité à zéro. Et il sera, en principe, toujours possible d'échapper à cet inconvénient. En effet, le déterminant dont il s'agit se trouve formé avec les *éléments* $y_1, y_2, \ldots, z_1, z_2, \ldots$, etc., qu'on peut supposer tous indépendants les uns des autres, puisque des valeurs initiales de $y, z, u, \ldots$ sont susceptibles d'être quelconques. Donc les équations (8), en général *distinctes*, se résoudront sans difficulté par rapport à $c_1, c_2, \ldots, c_n$. C'est dire que l'on pourra prendre ces constantes telles que, à l'instant $x = x_0$, $y, z, u, \ldots$, reçoivent des valeurs choisies à volonté. Ainsi les formules (8) représentent les intégrales générales.

Résolues par rapport à $c_1, c_2, \ldots, c_n$, elles ne cesseront pas d'être du premier degré en $y, z, u, \ldots$, et s'écriront

$$(9) \qquad \begin{cases} M_1 y + N_1 z + P_1 u + \ldots = c_1, \\ M_2 y + N_2 z + P_2 u + \ldots = c_2, \\ M_3 y + N_3 z + P_3 u + \ldots = c_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

en y appelant $M_1, N_1, P_1, \ldots, M_2, N_2, \ldots$, etc. certaines fonctions explicites de la variable indépendante x seule, combinaisons rationnelles de $y_1, z_1, u_1, \ldots, y_2, z_2, u_2, \ldots$, etc. Or ces relations (9) sont évidemment les intégrales générales mises sous la forme normale $\varphi(x, y, z, u, \ldots) = c$. On peut les représenter toutes par la formule unique

$$My + Nz + Pu + \ldots = c.$$

Par conséquent, *les expressions générales,* (8), *de fonctions* $y, z, u, \ldots$ *régies par des équations linéaires sans seconds membres, sont homogènes du premier degré par rapport aux constantes arbitraires (convenablement choisies) qu'introduit l'intégration; et, de même, dans les équations intégrales correspondantes mises sous la forme normale* $\varphi = c$, *les valeurs* φ *des constantes sont homogènes du premier degré par rapport aux fonctions* $y, z, u, \ldots$.

Il suit de là que *les facteurs d'intégrabilité* $\dfrac{d\varphi}{d(y, z, u, \ldots)}$ *se réduisent, pour ces équations,* aux coefficients M, N, P, ..., c'est-à-dire *à des fonctions explicites de la variable indépendante* x *seule.*

392. — Passage au cas d'équations linéaires quelconques ou avec seconds membres : méthode générale de la variation des constantes.

Voyons maintenant comment on pourra, introduisant les seconds membres $F_1, F_2, F_3, \ldots$, effectuer l'intégration, supposé qu'on ait su la faire dans l'hypothèse $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $F_3 = 0, \ldots$, c'est-à-dire qu'on ait réussi à former explicitement les seconds membres de (8) ou les premiers de (9).

Pour plus de généralité, soit

$$(10) \qquad \frac{dy}{dx} - f_1 = F_1, \qquad \frac{dz}{dx} - f_2 = F_2, \qquad \frac{du}{dx} - f_3 = F_3, \ldots$$

un système d'équations différentielles où $f_1, f_2, f_3, \ldots, F_1, F_2, F_3, \ldots$, désignent des fonctions quelconques de $x, y, z, u, \ldots$; et admettons qu'on ait intégré ces équations dans le cas où les seconds membres F_1, F_2, $F_3, \ldots$ se réduisent à zéro. On connaîtra donc, pour ce cas, les intégrales normales

$$(11) \qquad \begin{cases} \varphi_1(x, y, z, u, \ldots) = c_1, \\ \varphi_2(x, y, z, u, \ldots) = c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_n(x, y, z, u, \ldots) = c_n, \end{cases}$$

dont l'une quelconque peut s'écrire $\varphi(x, y, z, u, \ldots) = c$; et les premiers membres des équations (10), multipliés respectivement par $\frac{d\varphi}{dy}dx, \frac{d\varphi}{dz}dx, \frac{d\varphi}{du}dx, \ldots$, puis ajoutés, donneront (p. 192) la différentielle totale exacte de la fonction φ. C'est dire que les équations proposées (10) elles-mêmes, ainsi multipliées soit par $\frac{d\varphi_1}{d(y, z, u, \ldots)}dx$, soit par $\frac{d\varphi_2}{d(y, z, u, \ldots)}dx, \ldots$, et ajoutées chaque fois, deviendront

$$(12) \qquad \begin{cases} d\varphi_1 = \left(F_1 \frac{d\varphi_1}{dy} + F_2 \frac{d\varphi_1}{dz} + F_3 \frac{d\varphi_1}{du} + \ldots\right) dx, \\ d\varphi_2 = \left(F_1 \frac{d\varphi_2}{dy} + F_2 \frac{d\varphi_2}{dz} + F_3 \frac{d\varphi_2}{du} + \ldots\right) dx, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Or, si les équations proposées sont linéaires, d'une part, leurs seconds membres $F_1, F_2, F_3, \ldots$ ne dépendront explicitement que de x, et, d'autre part, les facteurs d'intégrabilité des équations sans seconds membres, $\frac{d\varphi_1}{dy}, \frac{d\varphi_1}{dz}, \frac{d\varphi_1}{du}, \ldots$, se réduiront aux coefficients

M_1, N_1, P_1, ..., dont il a été parlé ci-dessus, coefficients également fonction de x seul. Les deuxièmes membres des équations (12) seront donc des différentielles de la forme $f(x)\,dx$; et de simples quadratures, effectuées à partir de la valeur initiale x_0 de x, permettront d'intégrer ces équations (12), qui donneront, en continuant à attribuer à y, z, u, ... leurs valeurs initiales du cas où s'annulaient les seconds membres :

$$
(13)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\varphi_1 = c_1 + \int_{x_0}^{x} \left(F_1 \frac{d\varphi_1}{dy} + F_2 \frac{d\varphi_1}{dz} + F_3 \frac{d\varphi_1}{du} + \dots \right) dx, \\
&\varphi_2 = c_2 + \int_{x_0}^{x} \left(F_1 \frac{d\varphi_2}{dy} + F_2 \frac{d\varphi_2}{dz} + F_3 \frac{d\varphi_2}{du} + \dots \right) dx, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
\right.
$$

Donc *les facteurs, fonctions de la variable indépendante x seule, qui rendent intégrable un système d'équations linéaires sans seconds membres, rendent aussi intégrable le même système, complété par des seconds membres dépendant d'une manière donnée quelconque de cette variable x. Et les modifications qu'éprouvent alors les intégrales consistent dans l'addition, aux constantes arbitraires c_1, c_2, ..., c_n, de parties calculables en fonction de x au moyen de quadratures,* comme le montrent les seconds membres de (13): ce qui, dans le cas d'équations linéaires, laisse la forme normale des intégrales encore *linéaire* en y, z, u, ..., mais non plus *homogène*, vu l'adjonction d'un terme en x, savoir (au signe près) le dernier terme de chaque formule (13).

On voit que les intégrales obtenues (13) garderont leurs formes (11) du cas où il n'y avait pas de seconds membres, pourvu que, modifiant, sauf pour l'instant x_0, la signification des quantités c_1, c_2, ..., c_n, on y englobe les secondes parties en question, ou derniers termes de (13), qui les rendront *variables*.

Aussi le procédé d'intégration exposé, dû (au moins en principe) à Lagrange, s'appelle-t-il la *Méthode de la variation des constantes*. Et les équations (11) fourniront pour y, z, u, ... en fonction de x et de leurs seconds membres, les expressions, (8) par exemple, qu'elles donnaient déjà quand F_1, F_2, F_3, ... s'annulaient ; mais, après substitution des seconds membres de (13) à ceux de (11), ces expressions, encore du premier degré en c_1, c_2, ..., c_n s'il s'agit d'équations différentielles linéaires, ne seront plus homogènes, par suite de l'accession d'un terme en x y provenant de la *variation des constantes*. Afin d'éviter toute confusion, nous désignerons, le cas échéant, par C_1,

$C_2, \ldots, C_n$ les constantes *devenues* variables, c'est-à-dire les seconds membres tout entiers de (13); et les anciennes constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ne seront plus alors que les *valeurs initiales* de $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Quelques exemples simples (n^{os} 396 à 399) éclairciront bientôt ce que pourraient avoir de trop vague, par leur généralité même, les considérations qui précèdent.

393*. — Absence de solutions singulières et d'intégrales asymptotes distinctes, dans les systèmes d'équations linéaires.

(Compléments, p. 260*.)

394. — Sur l'emploi de la méthode de la variation des constantes, pour intégrer par approximations successives des systèmes d'équations différentielles non linéaires.

Mais, revenant au système (10), supposons-le non linéaire. Alors on pourra toujours, dans les seconds membres de (12), qui auront la forme $f(x, y, z, u, \ldots)\,dx$, remplacer $y, z, u, \ldots$ par leurs valeurs (en x et $C_1, C_2, \ldots, C_n$) tirées des formules $C_1 = \varphi_1(x, y, z, u, \ldots)$, $C_2 = \varphi_2(x, y, z, u, \ldots), \ldots, C_n = \varphi_n(x, y, z, u, \ldots)$ définissant les paramètres ou variables auxiliaires $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Donc ces relations (12) deviendront des équations différentielles en $C_1, C_2, \ldots, C_n$; et, si l'on sait les intégrer, ou obtenir $C_1, C_2, \ldots, C_n$ en fonction de leurs valeurs initiales arbitraires $c_1, c_2, \ldots, c_n$ et de x, l'on aura encore résolu le problème en rendant variables d'une certaine manière, dans les intégrales (11) des équations sans seconds membres, les constantes arbitraires.

Si, par exemple, les seconds membres $F_1, F_2, F_3, \ldots$ sont presque constamment très petits à côté des fonctions $f_1, f_2, f_3, \ldots$, et que, par suite, les valeurs (12) de $dC_1, dC_2, \ldots, dC_n$ n'égalent que de minimes fractions des différentielles $dy, dz, \ldots$, données par (10), les quantités $C_1, C_2, \ldots, C_n$ conserveront à fort peu près leurs valeurs initiales $c_1, c_2, \ldots, c_n$ pendant que $x, y, z, u, \ldots$ éprouveront des changements même très sensibles; et l'on pourra, dans les seconds membres de (12) devenus dépendants de $x, C_1, C_2, \ldots, C_n$, ne faire varier que x. Ces seconds membres, ainsi réduits, avec une certaine approximation relative, à la forme $f(x)\,dx$, seront alors intégrables, et de simples quadratures donneront par conséquent, d'une manière presque exacte si $x - x_0$ n'est pas trop grand, les petites ou lentes variations éprouvées par $C_1, C_2, \ldots$. Puis on portera dans les seconds membres de (12) les valeurs plus approchées de $C_1, C_2, \ldots$, obtenues de la sorte

en fonction de x ; et il en résultera, par de nouvelles quadratures, des valeurs plus exactes encore de ces paramètres ou, conséquemment, de $y, z, u, \ldots$: d'où l'on passera encore de même, s'il y a lieu, au calcul de corrections de moins en moins imparfaites.

On voit que la méthode de la variation des constantes permet de résoudre, par ces sortes d'approximations successives déjà annoncées presque dès le début du Cours (t. I, p. 73), tous les problèmes dépendant d'équations différentielles, quand certaines altérations légères ou, du moins, assez peu graves, qu'on fait subir à celles-ci, suffisent pour les rendre directement intégrables. Alors les équations simplifiées qu'on substitue, à une première approximation, aux équations vraies du problème, donnent, en quelque sorte, les lois idéales ou *lois typiques* du phénomène ; et l'on tient compte des écarts, appelés *perturbations,* qui existent entre ces lois idéales simples et les lois réelles, en faisant éprouver aux constantes arbitraires supposées invariables par les lois typiques, les lentes variations que fournit la méthode. C'est ainsi que, par suite de la faible masse des planètes comparativement à celle du Soleil, les équations différentielles de leurs mouvements se réduisent assez approximativement à ce qu'elles seraient si chaque planète ne se trouvait en rapport qu'avec le Soleil, cas où leurs intégrales sont aisées à obtenir, et résumées dans les lois de Képler assignant à chaque planète une orbite elliptique fixe, etc.; après quoi, des approximations de plus en plus compliquées, objet principal de la Mécanique céleste, indiquent comment les *perturbations* dues à la présence des autres planètes, ou à la forme des astres assimilés jusque-là à de simples points, rendent sans cesse *variables* tant l'orbite elliptique que la vitesse d'accroissement des aires décrites à son intérieur par le rayon vecteur de la planète, c'est-à-dire, en somme, les *constantes* du mouvement formulé d'après les lois de Képler.

Un exemple simple (n° **400**) élucidera bientôt ces indications, et l'on en trouvera un second, plus difficile, au n° **419***.

395. — Équations linéaires d'ordre supérieur; cas particulier d'une équation unique et réduction d'un système quelconque à une telle équation pour chaque fonction inconnue.

Lorsqu'on transforme un système d'équations différentielles d'ordre quelconque en un système du premier ordre (p. 193) par la considération de fonctions auxiliaires égales à certaines dérivées des fonctions proposées, les équations qu'on introduit, comme, par exemple,

$\frac{dy}{dx} - y' = 0, \frac{dy'}{dx} - y'' = 0, \ldots$, sont des équations linéaires, sans seconds membres et à coefficients constants. Donc, si le système proposé était linéaire, il ne cesse pas de l'être en devenant du premier ordre ; et il se trouve même soit sans seconds membres, soit à coefficients constants, quand le proposé l'est déjà. Ainsi toutes les réflexions et théories précédentes s'étendent d'elles-mêmes aux équations linéaires d'un ordre quelconque.

Considérons, par exemple, l'équation unique, et du $n^{\text{ième}}$ ordre en y,

$$y^{(n)} + \mathrm{A}y^{(n-1)} + \mathrm{B}y^{(n-2)} + \ldots + \mathrm{L}y = \mathrm{F}(x), \tag{14}$$

où les coefficients A, B, ..., L désignent, comme le second membre $\mathrm{F}(x)$, des fonctions données de la variable indépendante x. Elle équivaudra au système linéaire de n équations du premier ordre, à n fonctions inconnues $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$,

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{dy}{dx} - y' = 0, \quad \frac{dy'}{dx} - y'' = 0, \quad \ldots, \quad \frac{dy^{(n-2)}}{dx} - y^{(n-1)} = 0, \\ &\frac{dy^{(n-1)}}{dx} + \mathrm{A}y^{(n-1)} + \mathrm{B}y^{(n-2)} + \ldots + \mathrm{L}y = \mathrm{F}(x). \end{aligned}\right.$$

Il en résulte notamment que, si l'on pose d'abord $\mathrm{F}(x) = 0$, l'expression générale de y, d'où des différentiations immédiates déduiront celles de $y', y'', y''', \ldots, y^{(n-1)}$, sera de la forme

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n \qquad [\text{quand } \mathrm{F}(x) = 0]. \tag{16}$$

Mais il faudra, pour cela, que les n intégrales particulières y_1, $y_2, \ldots, y_n$ de l'équation (14) *prise sans second membre* soient distinctes, c'est-à-dire telles, que le système de n relations du premier degré en $c_1, c_2, \ldots, c_n$ formé par l'équation (16) et ses $n-1$ premières dérivées puisse être résolu par rapport aux constantes arbitraires $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ou donner les intégrales *normales*, et permettre, par conséquent, de choisir $c_1, c_2, \ldots, c_n$ de manière à rendre arbitraires, pour $x = x_0$, les valeurs (*initiales*), $y_0, y'_0, y''_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$, de la fonction y et de ses $n-1$ premières dérivées.

A l'inverse, si l'on donne non plus une équation linéaire (14), mais un système quelconque d'équations linéaires, qui, réduit au premier ordre, pourra être supposé le système (1) considéré déjà [p. 200], on en déduira facilement pour chaque fonction inconnue, y par exemple, une équation linéaire d'ordre n. Et celle-ci se trouvera soit dépourvue

de second membre, soit à coefficients A, B, ..., L constants, quand le système donné sera lui-même ou sans seconds membres F_1, F_2, ..., ou à coefficients A_1, B_1, ... constants. Différentions, en effet, l'expression de y' fournie par la première (1) et où y, z, u, ... ne figurent qu'au premier degré. Il viendra évidemment, pour y'', une expression, linéaire en y', z', u', ..., y, z, u, ..., qui, tout en conservant cette forme, ne contiendra plus que y, z, u, ... après substitution, à y', z', u', ..., de leurs valeurs tirées de (1). En outre, il est clair, d'une part, que cette expression n'aura pas de terme indépendant de y, z, u, ... si les équations (1) sont sans seconds membres, d'autre part, que y, z, u, ... s'y trouveront affectés de coefficients constants quand ceux de (1), A_1, B_1, C_1, ..., A_2, ..., le seront. Et l'on obtiendra des résultats analogues en procédant de même sur cette expression de y'', pour avoir y''', sur celle de y''', pour avoir y^{iv}, etc.; de sorte que toutes les dérivées de y, à l'infini, égaleront des fonctions linéaires de y, z, u, ... jouissant des propriétés désignées. Donc il suffira d'éliminer les $n-1$ fonctions z, u, ... entre les n équations du premier degré dont les seconds membres sont les dérivées y', y'', ..., $y^{(n)}$ et les premiers, leurs expressions en y, z, u, ... avec ou sans termes indépendants de ces variables, pour obtenir l'équation linéaire annoncée, du $n^{\text{ième}}$ ordre en y.

Comme exemple très simple, soit le système, à coefficients constants,

$$(17)\qquad y' - kz = F_1(x), \qquad z' + ky = F_2(x).$$

La première (17), différentiée, donnera $y'' - kz' = F_1'(x)$. Or par la substitution dans celle-ci, à z', de sa valeur $-ky + F_2(x)$ tirée de la seconde (17), il viendra

$$(18)\qquad y'' + k^2 y = F_1'(x) + kF_2(x),$$

équation d'où z est tout éliminé. De même, la différentiation de la seconde (17), suivie de l'élimination de y' par le moyen de la première, conduit, pour z, à la relation

$$(19)\qquad z'' + k^2 z = F_2'(x) - kF_1(x).$$

On voit que, si les seconds membres de (17) étaient nuls, une même équation différentielle du second ordre régirait les deux fonctions inconnues y et z, savoir $u'' + k^2 u = 0$, où u désignerait à volonté l'une ou l'autre.

Il est clair que, plus généralement, l'élimination d'une des deux

fonctions inconnues régies par deux équations linéaires du premier ordre simultanées conduira, pour l'autre fonction, à une équation linéaire de la forme

$$y'' + Ay' + By = F(x), \tag{20}$$

c'est-à-dire du second ordre, et à coefficients A, B constants quand ceux des proposées le seront.

TRENTE-NEUVIÈME LEÇON.

APPLICATION DES THÉORIES PRÉCÉDENTES AUX ÉQUATIONS LINÉAIRES DU SECOND ORDRE LES PLUS SIMPLES.

---

396. — Exemple : intégration de l'équation linéaire du second ordre à coefficients constants et sans second membre.

Appliquons en premier lieu les théories précédentes à l'équation linéaire du second ordre (20) [p. 215], en nous bornant même au cas de A, B constants. Ce cas, dont on doit à d'Alembert la solution générale (obtenue vers 1747), est d'une importance capitale dans les applications mécaniques et physiques.

Supposons d'abord le second membre $F(x)$ nul. Alors l'équation proposée (20) pourra s'écrire symboliquement

$$(21) \qquad \left(\frac{d^2}{dx^2} + A\frac{d}{dx} + B\right)y = 0.$$

Préparons le trinôme symbolique entre parenthèses comme nous le ferions si $\frac{d}{dx}y$ désignait une vraie variable X et qu'il s'agît de convertir ce trinôme en une somme ou une différence de deux carrés pour obtenir, par exemple, les racines imaginaires ou réelles annulant $X^2 + AX + B$. Autrement dit, appelons -2α la constante A et $\pm\beta^2$ l'excédent positif ou négatif de l'autre constante B sur α^2; ce qui revient à se donner l'équation (21) sous la forme

$$(22) \qquad y'' - 2\alpha y' + (\alpha^2 \pm \beta^2)y = 0, \qquad \text{ou} \qquad \left[\left(\frac{d}{dx} - \alpha\right)^2 \pm \beta^2\right]y = 0.$$

Elle admettra les deux solutions particulières

$$(23) \quad \begin{cases} y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x, & \text{quand le signe de } \pm\beta^2 \text{ sera } +, \\ y_1 = e^{\alpha x}\operatorname{coh}\beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x}\operatorname{sih}\beta x, & \text{quand le signe de } \pm\beta^2 \text{ sera } -, \end{cases}$$

comme on le vérifie sans difficulté par deux différentiations de ces valeurs, avec substitution soit de y_1, y'_1, y''_1, soit de y_2, y'_2, y''_2, à y, y', y'' dans l'équation (22) correspondante, ou, mieux encore, comme

on l'a déduit de transformations simplificatrices au t. I, p. 84*. Et l'intégrale générale sera, par suite, $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$, c'est-à-dire

$$(24)\quad \begin{cases} y = e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x), & \text{si le signe de } \pm\beta^2 \text{ est } +, \\ y = e^{\alpha x}(c_1 \operatorname{coh}\beta x + c_2 \operatorname{sih}\beta x), & \text{si le signe de } \pm\beta^2 \text{ est } -. \end{cases}$$

On remarquera que, dans le second cas, où l'expression de y contient un cosinus et un sinus hyperboliques, il suffit de poser $c_1 = 1$, $c_2 = \pm 1$, pour obtenir les deux intégrales particulières

$$e^{\alpha x}(\operatorname{coh}\beta x \pm \operatorname{sih}\beta x) = e^{\alpha x} e^{\pm\beta x},$$

c'est-à-dire $e^{(\alpha+\beta)x}$ et $e^{(\alpha-\beta)x}$, dont on formerait aisément l'intégrale générale, en les multipliant par deux constantes arbitraires et ajoutant. Or ces intégrales particulières $e^{(\alpha\pm\beta)x}$ auraient pu aussi se déduire directement de la seconde (22), qui, vu le signe $-$ de β^2, devient alors, par une décomposition immédiate de la différence des deux carrés symboliques en un produit,

$$(25)\qquad \left[\frac{d}{dx} - (\alpha \mp \beta)\right]\left[\frac{d}{dx} - (\alpha \pm \beta)\right] y = 0,$$

équation évidemment satisfaite quand on prend

$$(25\ bis)\qquad \frac{dy}{dx} - (\alpha \pm \beta) y = 0, \qquad \text{c'est-à-dire,} \qquad y = e^{(\alpha\pm\beta)x}.$$

Le cas le plus utile est celui où l'équation proposée (22) se trouve débarrassée de son second terme (en y'), circonstance réalisée naturellement, au moins à très peu près, dans la plupart des applications physiques, et résultant, quand il n'en est pas ainsi, d'une transformation facile (p. 256*), qui consiste à substituer à y la nouvelle fonction Y définie par la relation $y = e^{\alpha x}Y$. Bornons-nous donc à ce cas, où la valeur de α s'annule. Les expressions (24) de y y deviennent

$$(26)\quad \begin{cases} y = \text{soit} \quad c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x, \quad \text{soit } c_1 \operatorname{coh}\beta x + c_2 \operatorname{sih}\beta x; \\ \text{d'où} \\ y' = \text{soit} \quad -c_1\beta \sin\beta x + c_2\beta \cos\beta x, \quad \text{soit } c_1\beta \operatorname{sih}\beta x + c_2\beta \operatorname{coh}\beta x. \end{cases}$$

Comme l'équation proposée $y'' \pm \beta^2 y = 0$, où x ne figure pas explicitement, reste la même quand on change l'origine des x de manière à remplacer $x - x_0$ par x, il est permis de faire nulle la valeur initiale x_0 de x; et alors les équations (26), donnant $y = c_1$, $y' = c_2\beta$ pour $x = 0$, montrent que les constantes arbitraires c_1, c_2 représentent, l'une, la valeur initiale y_0 de la fonction, l'autre, le quotient par β de la valeur initiale y'_0 de sa dérivée, en sorte que les intégrales (26)

sont bien générales, ou permettent de choisir à volonté y et y' pour une valeur arbitraire de la variable.

Mettons-les sous la forme normale, afin d'obtenir les facteurs intégrants. A cet effet, nous éliminerons soit c_2, soit c_1, en multipliant l'équation de la seconde ligne (26), respectivement, soit par $-\dfrac{\sin\beta x}{\beta}$ ou $-\dfrac{\mathrm{sih}\,\beta x}{\beta}$, soit par $\dfrac{\cos\beta x}{\beta}$ ou $\dfrac{\mathrm{coh}\,\beta x}{\beta}$, et en ajoutant le résultat à l'équation de la première ligne, multipliée de même soit par $\cos\beta x$ ou $\mathrm{coh}\,\beta x$, soit par $\sin\beta x$ ou $-\mathrm{sih}\,\beta x$. Observons que

$$\cos^2\beta x + \sin^2\beta x = 1, \qquad \mathrm{coh}^2\beta x - \mathrm{sih}^2\beta x = 1,$$

et, après avoir changé les membres de place, il viendra

$$(27)\quad \left\{\begin{array}{l} c_1 = \text{soit}\quad y\cos\beta x - y'\dfrac{\sin\beta x}{\beta},\quad \text{soit}\quad y\,\mathrm{coh}\,\beta x - y'\dfrac{\mathrm{sih}\,\beta x}{\beta}, \\ c_2 = \text{soit}\quad y\sin\beta x + y'\dfrac{\cos\beta x}{\beta},\quad \text{soit}\quad -y\,\mathrm{sih}\,\beta x + y'\dfrac{\mathrm{coh}\,\beta x}{\beta}. \end{array}\right.$$

Les seconds membres de celles-ci sont les fonctions que nous appelons respectivement φ_1 et φ_2, ou dont les dérivées en y' constituent (p. 194) les facteurs intégrants de l'équation proposée $y'' \pm \beta^2 y = 0$, écrite $dy' \pm \beta^2 y\,dx = 0$. Et, en effet, l'expression $dy' \pm \beta^2 y\,dx$, multipliée par ces dérivées, qui sont

$$(28)\quad -\frac{\sin\beta x}{\beta}\ \text{ou}\ -\frac{\mathrm{sih}\,\beta x}{\beta}\ (\text{pour } c_1),\quad \text{et}\quad \frac{\cos\beta x}{\beta}\ \text{ou}\ \frac{\mathrm{coh}\,\beta x}{\beta}\ (\text{pour } c_2),$$

donne bien, identiquement, les différentielles totales des seconds membres de (27), comme le montre la différentiation de ceux-ci.

397. — Intégration de la même équation, mais avec second membre.

Si nous restituons actuellement le second membre $F(x)$ de l'équation, les principes exposés ci-dessus (p. 210) permettront de déduire la nouvelle intégrale de celle qui vient d'être obtenue pour le cas où $F(x)$ s'annulait, puisqu'ils nous apprennent que les mêmes facteurs d'intégrabilité y suffisent. Supposons, par exemple, afin d'utiliser les calculs précédents, l'équation débarrassée de son second terme, ou réduite à $y'' \pm \beta^2 y = F(x)$. Le système linéaire à intégrer d'après les principes dont il s'agit sera

$$(29)\qquad dy' \pm \beta^2 y\,dx = F(x)\,dx, \qquad dy - y'\,dx = 0.$$

Des facteurs intégrants respectifs $\frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{dy'}$ et $\frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{dy}$, devant multiplier, les uns, la première équation (29) et, les autres, la seconde, les deux premiers seuls, (28), que nous pouvons écrire $\frac{dC_1}{dy'}$ et $\frac{dC_2}{dy'}$ puisque nous convenons d'appeler C_1, C_2 les valeurs des deux fonctions $\varphi_1(x, y, y')$ et $\varphi_2(x, y, y')$, nous seront utiles ; car les deux derniers, dérivées en y des seconds membres C_1, C_2 de (27), et qui égaleraient soit $\cos\beta x$ ou $\operatorname{coh}\beta x$, soit $\sin\beta x$ ou $-\operatorname{sih}\beta x$, ne donneront rien dans les résultats, à cause de la valeur zéro du second membre de la deuxième équation considérée (29). Il suffit donc de multiplier la première (29), c'est-à-dire l'équation unique proposée, par les facteurs (28) ; ce qui, nous venons de le voir, change identiquement le premier membre de (29) en $d\varphi_1$ et $d\varphi_2$, ou en dC_1 et dC_2. Et, si l'on intègre alors les résultats à partir de l'instant initial $x = 0$ où C_1 et C_2, réduits à y_0 et à $\frac{y'_0}{\beta}$, ont des valeurs arbitraires données c_1 et c_2, il vient

$$(30)\quad \left\{ \begin{aligned} C_1 &= c_1 - \frac{1}{\beta}\int_0^x F(x)(\sin\beta x \text{ ou } \operatorname{sih}\beta x)\,dx, \\ C_2 &= c_2 + \frac{1}{\beta}\int_0^x F(x)(\cos\beta x \text{ ou } \operatorname{coh}\beta x)\,dx. \end{aligned} \right.$$

Enfin, comme les relations (27), dont les premiers membres devenus variables s'appellent maintenant C_1 et C_2, ne sont qu'une autre forme des relations (26), ou reviennent à poser

$$(31)\left\{ \begin{aligned} y &= \text{soit } C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x, \text{ soit } C_1 \operatorname{coh}\beta x + C_2 \operatorname{sih}\beta x, \\ y' &= \text{soit } -C_1\beta \sin\beta x + C_2\beta \cos\beta x, \text{ soit } C_1\beta \operatorname{sih}\beta x + C_2\beta \operatorname{coh}\beta x, \end{aligned} \right.$$

il ne restera qu'à substituer les expressions (30) de C_1, C_2 dans celles-ci, ou même seulement dans la double équation de la première ligne (31), relative à y, pour avoir l'intégrale générale demandée, avec des valeurs initiales y_0 et y'_0, de la fonction y et de sa dérivée y', égales respectivement à c_1 et à $c_2\beta$.

On n'a guère à employer ces formules que dans des phénomènes sensiblement *périodiques* et à variations, y, *limitées*, dont l'expression ne comporte aucun des cosinus ou sinus hyperboliques figurant dans (31). Supposons donc que l'équation proposée soit seulement

$$(32)\qquad y'' + \beta^2 y = F(x).$$

Alors la formule (31) de y, restreinte à $C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x$, devient aussi simple que possible, après substitution des valeurs correspondantes (30) de C_1 et C_2, si l'on change sous les signes $\int$ le nom de la variable d'intégration x, afin de pouvoir, sans confusion, introduire sous ces signes des facteurs en x. Appelons cette variable, par exemple, ξ; et, dans la différence

$$\sin\beta x \int_0^x F(\xi)\cos\beta\xi\,d\xi - \cos\beta x \int_0^x F(\xi)\sin\beta\xi\,d\xi,$$

il sera permis de faire passer les facteurs $\sin\beta x$, $\cos\beta x$ sous les signes $\int$, puis de réduire à une seule intégrale la différence des deux. Il viendra enfin, comme solution générale de (32),

$$(33) \qquad y = c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x + \frac{1}{\beta}\int_0^x F(\xi)\sin(\beta x - \beta\xi)\,d\xi.$$

Effectivement, deux différentiations successives en x de cette expression (33) de y, dans lesquelles on se souviendra de la règle établie plus haut (p. 161) pour différentier une intégrale définie à élément et *limites* variables, donnent

$$(34) \quad \left\{ \begin{aligned} y' &= -c_1\beta\ \sin\beta x + c_2\beta\ \cos\beta x + \int_0^x F(\xi)\cos(\beta x - \beta\xi)\,d\xi, \\ y'' &= -c_1\beta^2\cos\beta x - c_2\beta^2\sin\beta x \\ &\qquad + F(x) - \beta\int_0^x F(\xi)\sin(\beta x - \beta\xi)\,d\xi; \end{aligned} \right.$$

et cette dernière valeur de y'', jointe au produit par β^2 de l'expression (33) de y, rend bien la somme $y'' + \beta^2 y$ égale à $F(x)$, conformément à (32).

On voit, en faisant $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ dans (33) et dans la première (34), que le dernier terme de (33), fourni par la variation des constantes, constitue pour l'équation proposée (32) une intégrale particulière *initialement nulle avec sa dérivée première y'*. La quadrature qu'exige le calcul de ce terme se fera évidemment sous forme finie par les principes exposés dans la XXII^e Leçon (pp. 23, 29 et 32), quand $F(\xi)$ se composera de termes proportionnels à des facteurs comme ξ^m, ou $\xi^m\cos n\xi$, ou $\xi^m\sin n\xi$ (avec m entier et positif), ou comme $e^{m\xi}\cos n\xi$ et $e^{m\xi}\sin n\xi$ (m et n désignant des nombres quelconques). Telle est donc la solution de l'équation proposée, que la méthode de la variation des constantes, appliquée en faisant varier celles-ci *à partir de*

l'instant initial $x = 0$, conduit à superposer à la solution générale $c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x$ de l'équation sans second membre.

398. — Cas où le second membre est soit constant, soit périodique.

Il existe deux cas spéciaux, d'une grande importance pratique, où la solution particulière la plus simple et la plus utile qu'admette l'équation (32) n'est pas celle dont il vient d'être parlé, mais bien une autre dans laquelle ne s'annulent pas, du moins ensemble, les valeurs initiales $y_0 = c_1$ et $y'_0 = c_2 \beta$ de y et y'.

Le premier, déjà abordé implicitement au n° 390 (p. 206), est celui où le second membre $F(x)$ se réduit à une constante K, et où, par suite, l'équation proposée, $y'' + \beta^2 y = K$, se trouve satisfaite en prenant pour y la valeur *constante* $\frac{K}{\beta^2}$. Cette solution particulière $y = \frac{K}{\beta^2}$, que nous savons représenter l'*état permanent* du phénomène régi par l'équation, se déduirait évidemment de (33) en la supposant réalisée dès l'origine, c'est-à-dire en faisant $c_1 = \frac{K}{\beta^2}$, $c_2 = 0$, ou $y_0 = \frac{K}{\beta^2}$, $y'_0 = 0$. Et en effet, le dernier terme de (33), vu la valeur K de $F(\xi)$, devient alors, par une intégration indéfinie immédiate, $\frac{K}{\beta^2}[\cos(\beta x - \beta\xi)]_{\xi=0}^{\xi=x} = \frac{K}{\beta^2}(1 - \cos\beta x)$; ce qui, joint à $c_1 \cos \beta x$, donne bien $y = \frac{K}{\beta^2}$.

Le deuxième cas est celui où le second membre $F(x)$ se compose de termes proportionnels à des cosinus ou sinus d'arcs fonctions linéaires de x, termes pouvant toujours se résoudre en groupes de la forme $M \cos nx + N \sin nx$, lesquels, par le choix de constantes K et γ telles que $M = K \cos\gamma$ et $N = K \sin\gamma$, se réduiront à la forme plus simple $K \cos(nx - \gamma)$. En langage ordinaire, une telle forme, $K \cos(nx - \gamma)$, et le mode de variation des quantités qu'elle représente, sont souvent qualifiés de *pendulaires*, du moins dans les phénomènes dynamiques où la variable appelée ici x désigne le temps : la raison en est qu'elle exprime à très peu près la suite des écarts (supposés assez petits) d'un *pendule*, de part et d'autre de sa verticale d'équilibre.

Ce cas comprend le précédent en supposant $n = 0$; et il comprend surtout celui d'un second membre *périodique*, car toute fonction $F(x)$ périodique, c'est-à-dire qui repasse par les mêmes valeurs

après un accroissement donné (appelé *période*) de la variable, peut se décomposer [p. 160*] en termes proportionnels soit aux cosinus, soit aux sinus dont la périodicité concorde avec la sienne, ou qui retrouvent leurs valeurs premières chaque fois qu'elle-même reprend celles qu'elle avait eues déjà. Si, plus généralement, les divers termes de $F(x)$ étaient proportionnels à des cosinus ou sinus ayant leurs périodes incommensurables entre elles, de manière à ne jamais repasser *tous à la fois* par les mêmes valeurs, les oscillations de ces termes de part et d'autre de zéro n'en rendraient pas moins $F(x)$ nul en moyenne, en exceptant celui, de valeur constante, qui correspondrait à $n=0$; et la fonction $F(x)$ serait ce qu'on peut appeler *irrégulièrement périodique*.

Dans tous ces cas, il est aussi naturel de former une intégrale offrant la périodicité *régulière* ou *irrégulière* de $F(x)$, qu'il l'était d'en former une constante quand $F(x)$ ne variait pas; et, vu le principe de superposition (n° 389, p. 206), il suffira de composer cette intégrale de celles, de l'espèce désignée, que l'on aurait pour chaque terme de $F(x)$, considéré séparément. Prenons ainsi $F(x)=K\cos(nx-\gamma)$ et, pour essayer d'abord l'hypothèse la plus simple, supposons la solution particulière cherchée, que j'appellerai Y, proportionnelle à $F(x)$. Donc faisons

$$\begin{cases} Y=aF(x)=aK\cos(nx-\gamma) \\ (\text{d'où } Y''=-an^2K\cos(nx-\gamma)=-an^2F(x)) \end{cases}$$

dans l'équation différentielle devenue $Y''+\beta^2Y=F(x)$, en nous réservant de déterminer a de manière à la vérifier s'il est possible. Or c'est ce qui a lieu ; car, par la suppression du facteur commun $F(x)$, il vient $-an^2+\beta^2a=1$, ou $a=\frac{1}{\beta^2-n^2}$ et $Y=\frac{K}{\beta^2-n^2}\cos(nx-\gamma)$. Par suite, si nous appelons encore Y la *solution périodique* complète, pour le cas où le second membre donné $F(x)$ est lui-même une fonction *régulièrement* ou *irrégulièrement* périodique de la forme $\Sigma K\cos(nx-\gamma)$, nous aurons l'expression suivante de Y, se réduisant bien à $y=\frac{K}{\beta^2}$ lors d'un seul terme avec n et γ nuls :

$$(35)\qquad Y=\sum\frac{K}{\beta^2-n^2}\cos(nx-\gamma),\quad \text{quand}\quad F(x)=\Sigma K\cos(nx-\gamma).$$

L'excédent, $y-Y$, de la solution générale y sur cette solution périodique Y ne sera autre que l'intégrale, ayant la forme

$$M\cos\beta x+N\sin\beta x.$$

de l'équation différentielle prise sans second membre. Donc, *un phénomène régi par l'équation différentielle* $y'' + \beta^2 y = F(x)$, *avec un second membre* $F(x)$ *exprimant l'influence de causes extérieures périodiques, comporte, pour un état initial convenablement choisi, une marche affectée de leur propre périodicité (régulière ou irrégulière), marche qui n'est plus suivie pour tout autre état initial, mais de part et d'autre de laquelle la marche effective oscille alors comme elle le fait autour de l'état de repos naturel quand les causes étrangères n'existent pas, ou autour de l'état permanent quand elles sont constantes.*

399. — Idée des phénomènes qui se règlent soit par la permanence, soit par la périodicité.

En général, l'équation $y'' + \beta^2 y = 0$, pour le phénomène soustrait aux influences extérieures, n'est qu'approximative, en ce sens qu'on y néglige non seulement des termes de l'ordre des carrés et produits de y ou de ses dérivées, termes réellement insensibles lorsque la quantité y reste fort petite, mais surtout des termes linéaires comme y'' ou comme $\beta^2 y$, et ayant seulement leurs coefficients, d'ailleurs constants, assez faibles pour qu'on puisse les supposer nuls à une première approximation. C'est par quelques-uns de ces termes respectivement proportionnels à $y, y', y'', y''', \ldots$ (mais dont on peut abstraire les deux affectés de y et y'', en les supposant déjà compris dans l'équation $y'' + \beta^2 y = 0$ avant sa division par le coefficient de y'') que s'exprimeront les *résistances passives, frottements*, etc., inséparables de tout phénomène dynamique, qui amènent, au bout de temps x plus ou moins longs, la fin des changements non entretenus dans les corps par des actions extérieures, c'est-à-dire l'évanouissement tout au moins asymptotique des oscillations que représente l'intégrale générale approchée $y = c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x$.

Or, lorsqu'on tient compte de ces petits termes linéaires du premier membre et que, d'ailleurs, des causes extérieures périodiques introduisent un second membre $F(x)$ composé de parties comme

$$K\cos(nx - \gamma),$$

l'équation continue à admettre, pour chacune d'elles supposée seule à tour de rôle, une solution périodique Y, proportionnelle non plus, généralement, à $K\cos(nx-\gamma)$, mais à $K\cos(nx-\gamma-\delta)$, où l'arc $nx-\gamma-\delta$ du cosinus *retarde* en quelque sorte, sur celui, $nx-\gamma$, du second membre, d'une certaine quantité constante δ. Autrement

dit, l'on posera la formule, à deux indéterminées a et δ ou $a\cos\delta$ et $a\sin\delta$,

$$(36)\quad \begin{cases} Y = aK\cos(nx-\gamma-\delta) \\ \quad = (a\cos\delta)K\cos(nx-\gamma)+(a\sin\delta)K\sin(nx-\gamma), \\ \text{pour} \\ F(x) = K\cos(nx-\gamma). \end{cases}$$

Les dérivées Y', Y'', Y''', ... se composeront évidemment, comme Y, de deux termes, où l'unique facteur variable sera, pour l'un, $\cos(nx-\gamma)$, pour l'autre, $\sin(nx-\gamma)$; de sorte que tout le premier membre de l'équation se réduira à deux pareils termes. Il suffira donc d'égaler le premier de ceux-ci au second membre $K\cos(nx-\delta)$, en identifiant à K son coefficient (fonction linéaire connue de $a\cos\delta$, $a\sin\delta$), et d'égaler le second à zéro, par l'annulation du coefficient total analogue de $\sin(nx-\gamma)$: ce qui donnera bien les deux équations nécessaires pour déterminer $a\cos\delta$ et $a\sin\delta$. La seconde sera même vérifiée en prenant simplement $\sin\delta=0$, ou Y proportionnel à $K\cos(nx-\gamma)=F(x)$, si le premier membre ne contient, avec y, que les dérivées d'ordre pair y'', y^{IV}, ..., comme il arrivait quand ce premier membre était $y''+\beta^2 y$; car le seul facteur variable figurant alors dans Y, Y'', Y^{IV}, ... sera $\cos(nx-\gamma)$, et il ne restera que l'équation en $a\cos\delta=\pm\sqrt{a^2}$. Enfin, $F(x)$ devenant une somme $\Sigma K\cos(nx-\gamma)$, régulièrement ou irrégulièrement périodique, Y, exprimé par

$$\Sigma aK\cos(nx-\gamma-\delta),$$

offrira bien une périodicité de même nature, quoique δ et a soient, d'un terme à l'autre, variables en fonction de n.

Par exemple, dans le cas le plus simple, les résistances passives ajoutent à l'équation sans second membre $y''+\beta^2 y=0$, un terme de la forme $2\varepsilon y'$, et d'un coefficient *positif* 2ε assez faible pour que le carré de sa moitié ε soit entièrement négligeable à côté de β^2. Alors l'équation différentielle sans second membre,

$$(37)\quad y''+2\varepsilon y'+\beta^2 y=0,\quad \text{ou, sensiblement,}\quad y''+2\varepsilon y'+(\varepsilon^2+\beta^2)y=0,$$

a pour intégrale générale, d'après la première (24) [p. 217] où il faut faire ici $\alpha=-\varepsilon$,

$$(38)\qquad y=e^{-\varepsilon x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x):$$

le facteur exponentiel décroissant $e^{-\varepsilon x}$ y entraîne bien l'*extinction* graduelle des oscillations exprimées par le facteur trigonométrique $c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x$, qui, seul, constituait l'intégrale quand on avait

$y'' + \beta^2 y = 0$. Et si l'on introduit un second membre $K\cos(nx - \gamma)$, la substitution, à y, y', y'', de la dernière expression (36) de Y et de ses deux premières dérivées, dans le trinôme $y'' + 2\varepsilon y' + \beta^2 y$ qu'il faut alors égaler à $K\cos(nx - \gamma)$, donnera les deux équations

$$(39)\quad a[(\beta^2 - n^2)\cos\delta + 2\varepsilon n\sin\delta] = 1, \qquad (\beta^2 - n^2)\sin\delta - 2\varepsilon n\cos\delta = 0.$$

Or la deuxième montre que $\tang\delta$, quotient de $2\varepsilon n$ par $\beta^2 - n^2$, est comparable au rapport de ε à n (en écartant le cas exceptionnel où n et β seraient presque égaux) et qu'on peut, sauf erreur de l'ordre des puissances supérieures de ce rapport, poser simplement

$$\delta = \frac{2n^2}{\beta^2 - n^2}\frac{\varepsilon}{n};$$

après quoi, la première (39) est de même réductible à $(\beta^2 - n^2)a = 1$, ou donne $a = \frac{1}{\beta^2 - n^2}$, comme si le *coefficient d'extinction* ε n'existait pas. Et il vient, en définitive,

$$(40)\quad \left\{\begin{aligned} &Y = \sum \frac{K}{\beta^2 - n^2}\cos\left(nx - \gamma - \frac{2\varepsilon n}{\beta^2 - n^2}\right),\\ &\text{pour}\\ &F(x) = \Sigma K\cos(nx - \gamma).\end{aligned}\right.$$

D'ailleurs, les écarts $y - Y$ existant entre l'intégrale générale y et cette solution périodique Y vérifieront l'équation (37), ou seront, d'après (38), de la forme $e^{-\varepsilon x}(M\cos\beta x + N\sin\beta x)$; ainsi ils s'atténueront graduellement suivant les mêmes lois que l'expression (38) de y dans le corps abandonné à lui-même.

On voit, en comparant les deux formules (35) et (40), que l'introduction du petit terme représentatif des résistances passives n'a pas modifié d'une manière bien appréciable la *solution périodique*, pas plus qu'elle n'a changé, tant que les valeurs de x sont modérées, l'expression sensiblement périodique des écarts $y - Y$, où le facteur $e^{-\varepsilon x}$ reste longtemps très peu inférieur à l'unité par suite de la petitesse de ε. Et à une époque ultérieure quelconque, la même forme approchée des excédents $y - Y$ persiste encore, avec des coefficients $Me^{-\varepsilon x}$, $Ne^{-\varepsilon x}$ de plus en plus réduits, il est vrai, mais d'une variation toujours fort lente. Enfin, le facteur $e^{-\varepsilon x}$, devenu évanouissant quand x a beaucoup grandi, rend alors négligeables ces écarts $y - Y$, quelles qu'aient été les circonstances initiales marquées par les constantes arbitraires M, N; et une intégrale *quelconque*, y, finit ainsi par se confondre *asymptotiquement* avec la solution *périodique* Y. C'est ce

qu'on exprime, dans le langage ordinaire, en disant que le phénomène *se règle par périodicité*, comme les causes qui l'entretiennent, tandis qu'il se réglerait *par permanence* si ces causes étaient invariables, ou que l'on eût $F(x) = \text{const.}$

Un tel *régime* devient cependant impossible (en tant que soumis à des lois aussi simples) dans un cas remarquable. C'est celui où la différence entre β^2 et l'une des valeurs de n^2 serait assez faible, pour faire dépasser à la fonction Y censée exprimée par (40), en atténuant le dénominateur correspondant $\beta^2 - n^2$, la limite de la petitesse admise qui, seule, justifie la forme linéaire donnée à l'équation du phénomène. Ce cas plus complexe, et qui échappe ainsi à notre analyse par suite seulement d'une grandeur exagérée des oscillations ou variations qu'y atteint y, se trouve donc caractérisé par une *égalité* exacte ou presque exacte *des périodes* (liées, l'une, à β, l'autre, à n) des deux fonctions, $c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x$ et $K\cos(nx - \gamma)$, exprimant, la première, les oscillations *naturelles* du phénomène dans le corps abandonné à lui-même et, la seconde, les variations périodiques d'une des influences extérieures données.

Une pareille concordance ne pouvant qu'être fort rare, c'est, en général, la formule (40) ou même, sensiblement, la formule plus simple (35), qui, pour les grandes valeurs de x, donnera, quelles qu'aient été les circonstances initiales, l'expression *asymptotique* approchée d'un mouvement régi à très peu près par l'équation différentielle $y'' + \beta^2 y = \Sigma K \cos(nx - \gamma)$.

Certains phénomènes, comme, par exemple, l'échauffement ou le refroidissement d'un petit solide immergé dans un liquide à température uniforme et constante, ne comportent pas de périodicité quand on les soustrait à toute influence extérieure variable ; car l'état physique y change toujours dans un même sens, jusqu'à l'*extinction* finale. L'équation *type* qui les gouverne n'est alors que du premier ordre : elle a la forme $y' + \beta^2 y = 0$, au lieu de $y'' + \beta^2 y = 0$, et elle admet pour intégrale générale $y = ce^{-\beta^2 x}$. Il est clair que, *entretenus*, au contraire, par des causes extérieures périodiques $\Sigma K \cos(nx - \gamma)$, ou désormais régis par l'équation $y' + \beta^2 y = \Sigma K \cos(nx - \gamma)$, ces mêmes phénomènes tendront encore vers un état périodique, défini par une intégrale, $Y = \Sigma a K \cos(nx - \gamma - \delta)$, que l'on formera comme il a été expliqué après la formule (36), et auquel, encore, ils parviendront asymptotiquement après des écarts ayant eu l'expression, $ce^{-\beta^2 x}$, de la quantité physique, considérée dans le système soustrait aux causes variables dont il s'agit.

La plupart des faits dynamiques sont, il est vrai, beaucoup trop

complexes pour pouvoir être définis, avec une certaine précision, au moyen d'une seule fonction y du temps; et de là résulte, sauf dans des conditions particulièrement heureuses, l'insuffisance de la présente analyse, pour le calcul de bien des phénomènes, que celle-ci ne fait, de la sorte, qu'esquisser. Mais il lui reste justement l'avantage de mettre en vue, dans des équations linéaires très simples des deux premiers ordres, comme les *lois typiques* et élémentaires de ces *établissements de régime,* par périodicité régulière ou surtout irrégulière approchant de la permanence, que la nature nous offre sans cesse, spécialement dans les mouvements astronomiques, ainsi que dans toutes les sortes d'écoulement des fluides, et que révèle aussi la marche des machines industrielles.

400. — Exemple de l'intégration approchée d'une équation non linéaire, par la méthode de la variation des constantes.

D'une équation linéaire avec second membre, passons maintenant à une équation non linéaire, afin de donner un exemple aussi simple que possible de la manière dont on pourra l'intégrer par approximations successives, après l'avoir provisoirement réduite à une autre, intégrable sous forme finie.

Nous supposerons que, x désignant le temps et y la coordonnée, à considérer, d'un mobile dont les écarts de part et d'autre de la situation $y = 0$ resteront assez faibles, il s'agisse d'un mouvement où la dérivée y'' de la vitesse y' soit une fonction donnée de l'espace y, nulle pour $y = 0$ et développable au moyen de la formule de Mac-Laurin, entre les limites dont il s'agit, en une série très rapidement convergente, $-\beta^2 y + Ey^2 + Fy^3 + \ldots$, ayant son premier coefficient négatif. L'équation à intégrer sera donc, si on ne laisse dans le second membre que les termes très petits devant $\beta^2 y$,

$$y'' + \beta^2 y = Ey^2 + Fy^3 + \ldots. \tag{41}$$

Comme l'on pourra, à une première approximation, prendre $y'' = -\beta^2 y$, ou poser $y = C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x$ avec C_1 et C_2 réduits à deux constantes c_1, c_2, cette valeur de y, substituée dans le second membre de (41), lui donnera bien la forme $F(x)$ et permettra, par conséquent, d'exprimer C_1 et C_2, devenus maintenant variables, par les formules (30) [bornées aux sinus et cosinus circulaires], que des approximations ultérieures seront même susceptibles, en faisant mieux connaître $F(x)$, de préciser davantage.

Bornons-nous au calcul de la deuxième approximation, dans l'hy-

pothèse que les temps x soient comptés à partir d'une époque où le mobile se trouvait, à l'origine, animé d'une certaine vitesse $y'_0 = k$. La première valeur approchée de y sera donc [vu les données $y_0 = 0$, ou $c_1 = 0$, et y'_0 ou $c_2 \beta = k$] $y = \frac{k}{\beta}\sin \beta x$; et, par suite, la valeur analogue du second membre de (41), borné de même à sa partie principale (en k^2), sera $F(x) = \frac{Ek^2}{\beta^2}\sin^2 \beta x$. Les formules (30) [p. 219] donneront

$$(42)\qquad \begin{cases} C_1 = -\dfrac{Ek^2}{\beta^3}\displaystyle\int_0^x \sin^3 \beta x\,dx, \\ C_2 = \dfrac{k}{\beta} + \dfrac{Ek^2}{\beta^3}\displaystyle\int_0^x \sin^2 \beta x \cos \beta x\,dx. \end{cases}$$

Substituons, dans la première de celles-ci, à $\sin^3 \beta x\,dx$, l'expression équivalente

$$(1 - \cos^2 \beta x)\frac{d\cos \beta x}{-\beta}$$

et, dans la seconde, à $\cos \beta x\,dx$ la différentielle $\frac{d\sin \beta x}{\beta}$: alors les intégrations seront immédiates, et nous trouverons

$$(43)\qquad C_1 = \frac{Ek^2}{\beta^4}\left(-\frac{2}{3} + \cos \beta x - \frac{\cos^3 \beta x}{3}\right), \qquad C_2 = \frac{k}{\beta} + \frac{Ek^2}{\beta^4}\frac{\sin^3 \beta x}{3}.$$

Il en résulte, pour la valeur demandée $C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x$ de y, en remplaçant d'abord $\sin^4 \beta x$ par $(1 - \cos^2 \beta x)^2$ et réduisant, puis enfin en substituant $\frac{1 + \cos 2\beta x}{2}$ au carré $\cos^2 \beta x$:

$$(44)\qquad \begin{cases} y = \dfrac{k}{\beta}\sin \beta x + \dfrac{Ek^2}{3\beta^4}(1 - \cos \beta x)^2 \\ \quad = \dfrac{k}{\beta}\sin \beta x + \dfrac{Ek^2}{2\beta^4}\left(1 - \dfrac{4}{3}\cos \beta x + \dfrac{1}{3}\cos 2\beta x\right). \end{cases}$$

On remarquera que, développée, cette expression de y, où le terme de première approximation, proportionnel à $\sin \beta x$, est périodique et nul en moyenne, comprend de plus, à la seconde approximation, outre un terme de même période, proportionnel à $\cos \beta x$, un autre terme proportionnel à $\cos 2\beta x$ ou, par conséquent, de période moitié moindre, et le terme constant $\frac{Ek^2}{2\beta^4}$. Ce dernier, ayant seul sa valeur moyenne différente de zéro, définit évidemment la *situation moyenne* du mobile, ou ce qu'on peut appeler le *centre de gravité* de sa tra-

jectoire. Donc ce centre ne se confond plus, dès la deuxième approximation, avec la *situation de repos* ou *d'équilibre* $y = 0$.

401*. — Emploi d'équations linéaires du second ordre pour le calcul de certaines intégrales définies, qui se reproduisent par deux ou par quatre différentiations.

(Compléments, p. 261*.)

402*. — Autre exemple : intégrales définies de Laplace.

(Compléments, p. 263*.)

403*. — Intégration de l'équation à second membre du problème de la charge roulante.

(Compléments, p. 265*.)

404* — Intégration d'une autre équation à second membre, pour le calcul d'une fonction qui joue un rôle capital dans la théorie des ondes produites à la surface d'une eau tranquille, par l'émersion d'un solide ou par un coup de vent.

(Compléments, p. 266*.)

QUARANTIÈME LEÇON.

***ÉTUDE DES ESPÈCES LES PLUS UTILES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES SANS SECONDS MEMBRES, SOIT D'ORDRE SUPÉRIEUR, SOIT SIMULTANÉES : ÉQUATIONS A COEFFICIENTS CONSTANTS.**

405*. — **Intégration d'une équation linéaire homogène d'ordre quelconque, à coefficients constants.**

(Compléments, p. 271*.)

406*. — **Cas singulier où l'équation caractéristique a des racines égales. — Réflexion générale sur la forme des résultats, quand il s'agit d'un système quelconque d'équations linéaires sans seconds membres et à coefficients constants.**

(Compléments, p. 273*.)

407*. — **Formation directe des solutions simples, pour tout un système d'équations linéaires à coefficients constants.**

(Compléments, p. 276*.)

408*. — **Expression la plus simple qui en résulte pour les intégrales générales d'un tel système sans seconds membres.**

(Compléments, p. 280*.)

409*. — **Formes plus spéciales imposées aux solutions simples ou doubles par la nature particulière des phénomènes à exprimer.**

(Compléments, p. 281*.)

410*. — **Application aux petits mouvements vibratoires d'un système élastique; possibilité d'y reproduire un état initial arbitraire en superposant de simples mouvements pendulaires synchrones, etc.**

(Compléments, p. 285*.)

411*. — **Méthode d'Euler pour l'intégration des équations linéaires sans seconds membres et à coefficients constants.**

(Compléments, p. 289*.)

412*. — Détermination des constantes arbitraires, effectuée par Cauchy.

(Compléments, p. 291*.)

413*. — Exemple : intégration d'équations du quatrième ordre, pour le calcul d'intégrales définies qui se reproduisent, en valeur absolue, par quatre différentiations.

(Compléments, p. 297*.)

QUARANTE ET UNIÈME LEÇON.

* SUITE DE L'ÉTUDE DES ESPÈCES LES PLUS UTILES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES SANS SECOND MEMBRE : ÉQUATIONS A COEFFICIENTS VARIABLES QUE L'ON SAIT INTÉGRER OU SOUS FORME FINIE, OU EN SÉRIE, OU PAR DES INTÉGRALES DÉFINIES FONCTIONS CYLINDRIQUES, ETC.

414*. — De quelques cas où s'intègre sous forme finie une équation linéaire sans second membre et à coefficients variables; équations homogènes par rapport à x, y, dx, dy, d^2y, d^3y, etc.

(Compléments, p. 301*.)

415*. — Formation d'équations linéaires ayant leurs intégrales de forme finie; équations de Jacobi.

(Compléments, p. 302*.)

416*. — Intégration des équations linéaires par les séries; exemple sur une équation du quatrième ordre, qui se présente dans la théorie du mouvement vibratoire transversal d'une barre droite de largeur constante à coupe verticale parabolique, comme sont les balanciers des machines à vapeur.

(Compléments, p. 304*.)

417*. — Intégration par le moyen d'intégrales définies; exemple tiré de l'équation du second ordre qui revient à celle de Riccati.

(Compléments, p. 306*.)

418*. — Idée des fonctions de Fourier et de Bessel, ou fonctions cylindriques : leurs expressions en intégrales définies et en séries.

(Compléments, p. 308*.)

419*. — Calcul approché des mêmes fonctions quand leur variable est

assez grande, au moyen de leurs expressions asymptotiques complétées grâce à la méthode de la variation des constantes.

(Compléments, p. 315*.)

120*. — Résolution rapide d'équations transcendantes où figurent les fonctions cylindriques.

(Compléments, p. 320*.)

QUARANTE-DEUXIÈME LEÇON.

*DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES ET DE LEUR INTÉGRATION SOUS FORME FINIE : ÉQUATIONS DU PREMIER ORDRE.

421*. — Des équations aux dérivées partielles : idée de leur utilité.

(Compléments, p. 322*.)

422*. — Signification des équations aux dérivées partielles; existence et étendue de leurs intégrales générales, dans les cas où une des variables indépendantes peut être choisie comme variable principale.

(Compléments, p. 323*.)

423*. — Des cas où soit une variable désignée, soit même aucune des variables figurant dans les équations, ne peut jouer le rôle de variable principale.

(Compléments, p. 327*.)

424*. — Description des surfaces définies par une équation du premier ordre, au moyen de courbes, dites caractéristiques, ne dépendant que de cette équation et de données relatives à leur point de départ.

(Compléments, p. 329*.)

425*. — L'intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre se réduit toujours à celle d'un système d'équations différentielles.

(Compléments, p. 331*.)

426*. — Forme plus simple de l'intégrale, quand l'équation est linéaire par rapport aux dérivées de la fonction inconnue.

(Compléments, p. 333*.)

427*. — De quelques cas où l'on sait ramener l'intégration d'un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre à celle d'équations différentielles; systèmes de Jacobi, linéaires par rapport aux dérivees.

(Compléments, p. 334*.)

428*. — Exemples de l'intégration d'équations du premier ordre, linéaires par rapport aux dérivées de la fonction inconnue.

(Compléments, p. 336*.)

429*. — Exemple d'une équation non linéaire : surfaces développables, ou enveloppes d'une série de plans; enveloppe d'une suite de surfaces, etc.

(Compléments, p. 339*.)

430*. — Intégrales complètes et solution singulière d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre.

(Compléments, p. 343*.)

QUARANTE-TROISIÈME LEÇON.

* SUITE DE L'INTÉGRATION, EN TERMES FINIS, DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES : ÉQUATIONS D'ORDRE SUPÉRIEUR.

431*. — Équations aux dérivées partielles du second ordre : méthode de Monge pour l'intégration de certaines d'entre elles.

(Compléments, p. 346*.)

432*. — Premier exemple : intégration de l'équation du second ordre qui caractérise les surfaces développables.

(Compléments, p. 349*.)

433*. — Deuxième exemple : équations aux dérivées partielles du second ordre immédiatement réductibles à des équations différentielles.

(Compléments, p. 350*.)

434*. — Aperçu des transformations d'Euler, de Laplace et de Legendre.

(Compléments, p. 353*.)

435*. — Intégration de l'équation de d'Alembert ou des cordes vibrantes, et d'une autre équation plus générale, qui régit les phénomènes de propagation d'ondes dans un milieu en mouvement.

(Compléments, p. 358*.)

436*. — Analogie de l'équation des cordes vibrantes, et, en général, des équations linéaires aux dérivées partielles, avec les équations différentielles linéaires, au point de vue des principes de superposition et de proportionnalité : cas où il y a égalité des racines de l'équation caractéristique.

(Compléments, p. 360*.)

437*. — De la détermination des fonctions arbitraires : applications aux ondes propagées dans un sens unique, et lois de deuxième approximation de ces ondes.

(Compléments, p. 362*.)

438*. — Extension, à certaines équations et à certains systèmes aux dérivées partielles, des méthodes de décomposition des intégrales en solutions simples, et d'élimination, fondées sur l'emploi des facteurs symboliques $\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \ldots,$ et qui sont générales dans le cas d'équations différentielles linéaires sans seconds membres, à coefficients constants, amenées à leur forme normale.

(Compléments, p. 366*.)

QUARANTE-QUATRIÈME LEÇON.

*PROCÉDÉS D'INTÉGRATION POUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES, SPÉCIAUX AUX PROBLÈMES DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE QUI CONCERNENT LES CORPS DE GRANDEUR FINIE : ÉTUDE D'ÉTATS VARIABLES EN FONCTION DU TEMPS.

439*. — Idée générale des équations de la Physique mathématique.

(Compléments, p. 374*.)

440*. — Sur leur réduction à des systèmes d'une infinité d'équations différentielles, formées pour un réseau de points régulièrement alignés en files parallèles aux axes.

(Compléments, p. 377*.)

441*. — Démonstration, par des procédés spéciaux, de la détermination des problèmes de Physique mathématique.

(Compléments, p. 381*.)

442*. — Résolution générale des problèmes concernant l'état variable des corps, par la superposition d'une infinité de solutions simples, affectées, chacune, d'une constante arbitraire.

(Compléments, p. 387*.)

443*. — Formation directe des solutions simples; détermination de leurs coefficients respectifs, d'après l'état initial donné.

(Compléments, p. 390*.)

444*. — Difficultés subsistant encore dans cette question, et inconvénients de la solution indiquée.

(Compléments, p. 394*.)

445*. — Ses avantages, dans les cas où quelques-unes des solutions simples ont une influence prédominante; régularisation de certains phénomènes par extinction des termes à variation rapide.

(Compléments, p. 396*.)

446*. — Exemple d'états variables exprimés par des séries : corde vibrante fixée aux deux bouts, et refroidissement d'une barre par ses extrémités, maintenues à la température zéro.

(Compléments, p. 397*.)

QUARANTE-CINQUIÈME LEÇON.

* SUITE DE L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE POUR LES CORPS DE DIMENSIONS FINIES : ÉTUDE D'ÉTATS PERMANENTS.

447*. — Extension des méthodes précédentes aux problèmes d'état permanent, quand une des coordonnées peut y jouer le rôle de variable principale : exemple relatif aux températures stationnaires d'un prisme.

(Compléments, p. 402*.)

448*. Même problème des températures stationnaires pour un espace plan soit limité par un rectangle curviligne, soit annulaire : sa solution générale, dans le cas où l'on en connaît une solution particulière simple.

(Compléments, p. 407*.)

449*. — Exemples : secteur d'une couronne circulaire ; rectangles limités par deux familles d'arcs de cercles ou par une famille de lemniscates et une famille d'hyperboles, etc.

(Compléments, p. 413*.)

Note sur la réduction de Riemann, pour certaines équations aux dérivées partielles du second ordre.

(Compléments, p. 418*.)

450*. — Solution soit approchée, soit quelquefois même exacte, au moyen d'expressions entières et finies, du problème des températures stationnaires pour un espace plan limité par un contour quelconque, et réduction, à ce problème, d'autres questions importantes de la Physique mathématique.

(Compléments, p. 419*.)

QUARANTE-SIXIÈME LEÇON.

* PROCÉDÉS D'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE, POUR LES CORPS D'UNE ÉTENDUE CENSÉE INFINIE : ÉQUATIONS NE CONTENANT QUE DES DÉRIVÉES D'UN MÊME ORDRE PAIR, ET QUI S'INTÈGRENT PAR DES POTENTIELS.

451*. — Dans quelles circonstances les dimensions d'un corps peuvent être supposées infinies; des simplifications qui s'y produisent.

(Compléments, p. 427*.)

452*. — Intégration par les potentiels, dans des cas où les équations indéfinies, linéaires et à coefficients constants, ne contiennent que des dérivées paires d'un même ordre. — Premier exemple : problème de l'écoulement d'un liquide par un petit orifice, etc.

(Compléments, p. 429*.)

453*. — Deuxième exemple : équilibre intérieur d'un solide élastique dont les parties profondes sont maintenues fixes, pendant que sa surface éprouve des pressions ou des déplacements connus, s'annulant hors d'une région restreinte où ils sont arbitraires; forme générale de la solution.

(Compléments, p. 430*.)

454*. — Premier cas, où ce sont les déplacements à la surface que l'on donne.

(Compléments, p. 432*.)

455*. — Deuxième cas, où ce sont les pressions extérieures que l'on connaît.

(Compléments, p. 434*.)

456*. — Troisième et quatrième cas, où l'on se donne, à la surface, soit les composantes tangentielles des déplacements avec la composante

normale des pressions, soit la composante normale des déplacements avec les composantes tangentielles des pressions.

(Compléments, p. 437*.)

457*. — **Troisième exemple : équilibre d'élasticité d'un solide, sous l'action de forces extérieures quelconques s'exerçant sur une partie de son volume très éloignée de sa surface, pendant que celle-ci est maintenue fixe.**

(Compléments, p. 441*.)

458*. — **Quatrième exemple : état permanent des températures, dans un corps pourvu, à son intérieur, de sources constantes de chaleur, et maintenu, loin de ces sources, à une température uniforme.**

(Compléments, p. 443*.)

459*. — **Cinquième exemple : intégration de l'équation du son par les potentiels sphériques.**

(Compléments, p. 443*.)

460*. — **Résultats immédiats de cette intégration : propagation du mouvement sans dissémination le long des trajets suivis; ce qui entraîne la conservation, à toute distance, des caractères de l'état initial et rend possible la précision ainsi que l'infinie variété des sensations auditives et visuelles.**

(Compléments, p. 448*.)

Remarques sur la même intégration et sur ses résultats, pour les cas où il y a moins de trois coordonnées. (Note.)

(Compléments, p. 450*.)

QUARANTE-SEPTIÈME LEÇON.

SUITE DES PROCÉDÉS D'INTÉGRATION POUR LES PROBLÈMES DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE RELATIFS AUX CORPS D'ÉTENDUE INFINIE : ÉQUATIONS OU FIGURENT DES DÉRIVÉES D'ORDRES DIFFÉRENTS, ET QUI S'INTÈGRENT PAR LES INTÉGRALES DÉFINIES DE LA XXXIII^e LEÇON.

461*. — Équations aux dérivées partielles, qui deviennent homogènes, relativement à l'ordre des dérivées, lorsque chaque couple de différentiations effectuées par rapport à certaines variables y est comptée pour une seule différentiation.

(Compléments, p. 452*.)

462*. — De l'intégration de ces équations par les intégrales définies de la XXXIII^e Leçon, quand ce sont les différentiations relatives aux coordonnées qui vont ainsi par couples; et, d'abord, formation de solutions particulières, contenant tout autant de fonctions arbitraires.

(Compléments, p. 453*.)

463*. — Exemples : formation de telles intégrales pour l'équation de la chaleur et pour celles du mouvement transversal des plaques ou des barres élastiques.

(Compléments, p. 457*.)

464*. — Usage de ces intégrales, pour les cas où la distance r à un centre fixe d'émanation a le rôle de variable principale.

(Compléments, p. 460*.)

465*. — Premier exemple : échauffement d'une barre, à travers sa base, par le rayonnement d'un milieu à température variable donnée.

(Compléments, p. 466*.)

466*. — Cas particulier de l'échauffement par contact.

(Compléments, p. 468*.)

467*. — Deuxième exemple : échauffement d'un corps indéfini, à une, deux ou trois dimensions, par l'introduction continue, en un de ses points, de quantités données de chaleur.

(Compléments, p. 471*.)

468*. — Sur l'intégration des mêmes équations indéfinies dans d'autres cas, et notamment dans celui où le temps *t* est variable principale : application au problème du refroidissement des milieux.

(Compléments, p. 478*.)

469*. — Application au problème de la dissémination du mouvement transversal, le long d'une barre indéfinie.

(Compléments, p. 484*.)

470*. — Application à la dissémination du mouvement transversal dans une plaque indéfinie.

(Compléments, p. 487*.)

QUARANTE-HUITIÈME LEÇON.

*SUITE DES PROCÉDÉS D'INTÉGRATION POUR LES PROBLÈMES DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE RELATIFS AUX CORPS D'ÉTENDUE INFINIE : ÉQUATIONS QUI S'INTÈGRENT PAR L'EMPLOI SIMULTANÉ DES POTENTIELS ET DES INTÉGRALES DÉFINIES DE LA XXXIII^e LEÇON.

471*. — **Intégrations effectuables par l'emploi simultané des potentiels et des intégrales définies de la XXXIII^e Leçon. — Équations du principal problème où elles se présentent, et qui est celui des ondes produites, à la surface d'un liquide pesant, par l'émersion d'un solide ou par une impulsion superficielle.**

(Compléments, p. 496*.)

472*. — **Premier cas, n'exigeant pas de potentiel sphérique : ondes produites dans un canal étroit ou propagées suivant un seul sens horizontal.**

(Compléments, p. 498*.)

473*. — **Équation qui y régit les déformations de la surface libre et la marche des ondes.**

(Compléments, p. 503*.)

474*. — **Deuxième cas, où devient nécessaire un potentiel sphérique : ondes produites dans un bassin et propagées suivant les deux sens horizontaux.**

(Compléments, p. 505*.)

475*. — **Équation qui y règle les déformations de la surface libre et le transport apparent des ondes.**

(Compléments, p. 510*.)

QUARANTE-NEUVIÈME LEÇON.

*RÉSULTATS GÉNÉRAUX CONCERNANT LA NATURE DES INTÉGRALES, DANS LES PROBLÈMES DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE RELATIFS AUX CORPS OU MILIEUX INDÉFINIS; EMPLOI DE LA FORMULE DE FOURIER POUR RÉSOUDRE CES PROBLÈMES.

476*. — Des solutions simples naturelles, dans les problèmes relatifs aux corps ou milieux indéfinis.

(Compléments, p. 516*.)

Exemple d'un problème d'état non permanent où il n'y a pas de variable principale : températures d'un milieu sillonné par une source calorifique. (Note.)

(Compléments, p. 517*.)

477*. — Double raison de la différence de nature existant entre ces solutions simples et celles des problèmes relatifs aux corps limités.

(Compléments, p. 522*.)

478*. — Leur formation possible par la formule de Fourier, au moyen de certaines des solutions simples convenant aux corps limités.

(Compléments, p. 524*.)

Sur l'intégration générale, en séries d'exponentielles et par la formule de Fourier, de certains systèmes d'équations aux dérivées partielles. (Notes.)

(Compléments, pp. 526* et 528*.)

479*. — Exemple de cette formation dans le problème de températures stationnaires résolu au n° 452*.

(Compléments, p. 529*.)

480*. — Exemples de la même formation, dans les problèmes du refroidissement des milieux et de la dissémination du mouvement transversal le long d'une barre ou à la surface d'une plaque.

(Compléments, p. 532*.)

CINQUANTIÈME LEÇON.

CALCUL DES VARIATIONS.

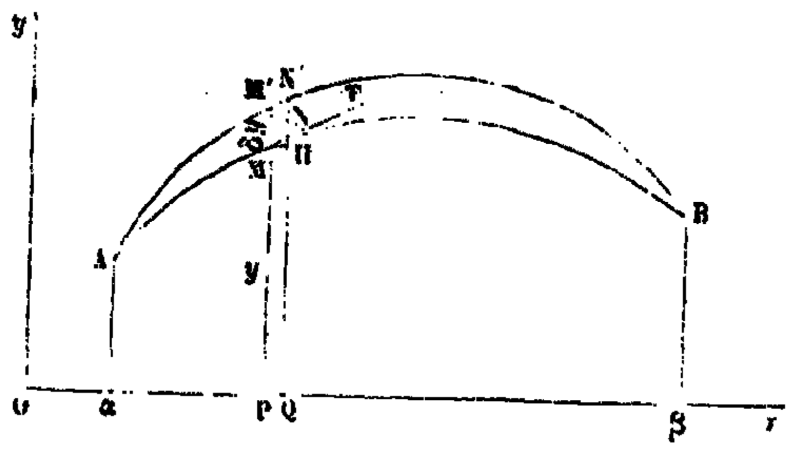
481. — But du calcul des variations.

Les équations soit différentielles, soit aux dérivées partielles, admettent encore une application importante, qui fera l'objet de notre dernière Leçon. Elle consiste à déterminer la forme que doivent recevoir certaines fonctions, graduellement altérables et arbitraires, du moins entre des limites ou sous des conditions désignées, pour rendre maximum ou minimum une intégrale définie, soit simple, soit multiple, dont les divers éléments se trouvent dépendre des valeurs successives de ces fonctions. Des problèmes célèbres de Géométrie et de Mécanique, résolus d'abord, vers la fin du XVII^e siècle, par des procédés spéciaux dont on verra plus loin un exemple (n° 493), ont donné naissance à cette dernière branche de l'Analyse, qu'Euler et Lagrange organisèrent définitivement, sous le nom de *Calcul des variations*, vers le milieu du siècle suivant.

Pour nous former une idée précise de son but, imaginons que, devant considérer dans le plan xOy [p. 248], entre un point connu A dont l'abscisse x est $O\alpha = a$ et un autre point connu B dont l'abscisse plus grande est $O\beta = b$, une courbe arbitrairement variable d'ailleurs, ou, ce qui revient au même, une infinité de courbes comme AMB, définies chacune par la fonction qui exprime en x leur ordonnée y, l'on donne en outre une fonction bien déterminée $f(x, y, y')$ de cette abscisse x, de l'ordonnée y et de quelques-unes des dérivées successives de celle-ci, dérivées que nous supposerons, pour plus de simplicité, se réduire à la première y', ou au coefficient angulaire $\frac{dy}{dx} = \frac{\text{HN}}{\text{MH}}$ de la tangente MT menée au point considéré quelconque $\text{M}(x, y)$; enfin, que l'on demande de choisir la courbe AMB, c'est-à-dire la fonction inconnue y de x, de manière à rendre l'intégrale $\int_a^b f(x,y,y')\,dx$ le plus grande ou le plus petite possible, savoir, ou constamment plus

grande, ou constamment plus petite pour cette courbe AMB que pour toute autre infiniment voisine, comme AM'B. Obtenir ainsi, entre des limites fixées a, b, la fonction y de x qui fait atteindre son

Fig. 59.



maximum ou son minimum à une intégrale $\int_a^b f(x, y, y')\,dx$ dépendant de la forme de cette fonction, tel est, *dans les conditions les plus simples*, le problème général du calcul des variations.

482. — Sa méthode, considérée comme cas limite de la règle usuelle pour les maxima et minima des fonctions de plusieurs variables indépendantes.

L'intervalle $b - a = \alpha\beta$ des deux limites se composant d'une infinité d'intervalles élémentaires dx, tels que PQ, compris entre des points de division de $\alpha\beta$ infiniment voisins définis chacun par leur abscisse x, et toute courbe qui va de A à B se trouvant évidemment caractérisée au moyen de ses ordonnées PM, QN, ... tirées par tous ces points de division, il est clair que la somme à étudier $\int_a^b f(x, y, y')\,dx$ constitue en réalité une fonction d'une infinité de variables, savoir, de toutes les ordonnées PM, QN, ..., existant entre αA et βB. Or ces ordonnées sont mutuellement indépendantes, en ce sens du moins qu'il n'existe aucune relation permettant de calculer l'une en fonction des autres. On pourra donc, malgré la complication introduite par une telle infinité de variables, essayer d'appliquer la règle ordinaire des maxima et minima (t. I, p. 171).

A cet effet, on cherchera l'accroissement total qu'éprouve la fonction considérée quand on fait changer infiniment peu chaque variable, autrement dit, quand on allonge chaque ordonnée PM d'une très petite quantité positive ou négative MM'; et, après avoir exprimé cet

accroissement de l'intégrale *à la manière d'une différentielle totale*, c'est-à-dire *en y isolant* la partie de l'accroissement qui correspond à l'augmentation MM′ prise par *chaque* variable indépendante PM, il faudra égaler à zéro le terme ainsi obtenu, ou plutôt le coefficient dont s'y trouvera affectée l'augmentation MM′ de la variable.

On appelle *variation* de l'ordonnée y, et l'on représente par δy, cette augmentation MM′ donnée à chaque variable $y = \mathrm{PM}$. On ne peut pas la représenter par dy, ni la nommer *différentielle*; car cette désignation s'applique déjà au changement $\mathrm{HN} = dy$ qu'éprouve l'ordonnée *le long d'une même courbe* pour une augmentation infiniment petite $\mathrm{PQ} = dx$ de l'abscisse. Il est d'ailleurs évident que la variation $\delta y = \mathrm{MM}'$, qui devient NN′ pour l'ordonnée suivante QN, sera, comme y, une fonction de x, ou, autrement dit, qu'elle variera d'une abscisse à l'autre et d'un élément à l'autre de l'intégrale.

La nouvelle courbe AM′B ayant ainsi pour ordonnée $y + \delta y$, le coefficient angulaire de sa tangente sera $\frac{dy}{dx} + \frac{d\delta y}{dx}$; et l'on voit que, pour une même valeur de x, il dépassera le coefficient angulaire y', relatif à la première courbe, de la quantité $\frac{d\delta y}{dx}$; celle-ci s'appelle, naturellement, la *variation* de la dérivée y'. Et, de même, la variation de chaque élément $f(x, y, y')dx$ de l'intégrale sera l'accroissement qu'il éprouvera quand, sans changer ni x, ni dx, on passera de la courbe AMB à la courbe AM′B, variation évidemment égale à

$$\left[f\left(x, y + \delta y, y' + \frac{d\delta y}{dx}\right) - f(x, y, y')\right] dx,$$

ou à

$$\left[\frac{df}{dy}\delta y + \frac{df}{dy'}\frac{d\delta y}{dx}\right] dx = \frac{df}{dy}\, dx\,\delta y + \frac{df}{dy'}\, d\delta y. \tag{1}$$

Enfin, la *variation* de l'intégrale proposée, qu'on représente par $\delta \int_a^b f(x, y, y')dx$, sera la somme des variations de tous ses éléments, puisque, par hypothèse, les limites a, b sont fixes et que, pour toutes les courbes AMB, AM′B, ..., le champ dx des éléments reste le même tant en situation qu'en grandeur. On aura donc

$$\delta \int_a^b f(x, y, y')\, dx = \int_{x=a}^{x=b} \frac{df}{dy}\, dx\,\delta y + \int_{x=a}^{x=b} \frac{df}{dy'}\, d\delta y. \tag{2}$$

Or il est facile de mettre en évidence, dans la dernière intégrale de cette relation, le coefficient total qui multiplie chaque variation δy,

telle que MM′. Comme $d\delta y$ exprime la différence, NN′ — MM′, de deux variations consécutives, chaque variation indépendante, MM′ par exemple, paraît dans deux éléments de l'intégrale en question, savoir, dans celui, $\frac{df}{dy'}(\mathrm{NN}'-\mathrm{MM}')$, qui est relatif à l'intervalle $dx = \mathrm{PQ}$ compté à partir de l'abscisse actuelle $\mathrm{OP} = x$, et dans celui qui est relatif à l'intervalle précédent, compris entre les abscisses $x - dx$ et x, élément où le facteur $d\delta y$ exprime l'excédent de MM′ sur la variation précédente et où $\frac{df}{dy'}$ a pour valeur, sensiblement, sa valeur actuelle diminuée de sa différentielle $d\frac{df}{dy'}$ corrélative à un accroissement dx de la variable. En résumé, la variation $\delta y = \mathrm{MM}'$ est multipliée par $\frac{df}{dy'} - d\frac{df}{dy'}$ dans l'un des deux éléments considérés, et par $-\frac{df}{dy'}$ dans l'autre; ce qui donne en tout le produit $-\left(d\frac{df}{dy'}\right)\delta y$.

Il en serait de même pour toutes les autres valeurs de δy entre A et B, à l'exception des deux variations extrêmes, savoir celles des ordonnées αA, βB, variations dont on peut ne pas s'occuper ici puisqu'on les suppose nulles. Ainsi le dernier terme de (2) revient à

$$\int_{x=a}^{x=b}\left(-d\frac{df}{dy'}\right)\delta y. \tag{3}$$

On voit par cet examen direct comment le terme en question, où figurait la variation *non indépendante* $\delta y' = \frac{d\delta y}{dx}$, se transforme de manière à ne plus contenir que les variations *indépendantes* ou *arbitraires* δy. Or on serait arrivé au même résultat et, en quelque sorte, mécaniquement, en intégrant par parties l'expression $\frac{df}{dy'}d\delta y$ placée sous le signe $\int$, ou, ce qui revient au même, en écrivant

$$\frac{df}{dy'}d\delta y = d\left(\frac{df}{dy'}\delta y\right) - \delta y\, d\frac{df}{dy'} \tag{4}$$

et, par suite,

$$\int_{x=a}^{x=b}\frac{df}{dy'}d\delta y = \left(\frac{df}{dy'}\delta y\right)_{x=a}^{x=b} - \int_{x=a}^{x=b}\left(d\frac{df}{dy'}\right)\delta y. \tag{5}$$

En effet, cette expression se trouve réduite à son dernier terme, qui

n'est autre que (3), par l'annulation supposée de δy aux deux limites, annulation entraînant celle du terme intégré $\frac{df}{dy'}\delta y$.

C'est donc au moyen d'intégrations par parties, dans lesquelles ils prennent pour facteurs non intégrés les facteurs multipliant sous les signes $\int$ une différentielle de variation, que les géomètres parviennent facilement à éliminer les variations non arbitraires égales à de telles différentielles (ou aux dérivées correspondantes) prises par rapport aux variables d'intégration.

En résumé, remplaçons le dernier terme de (2) par sa valeur ainsi réduite (3), et l'expression définitive de la variation de $\int_a^b f(x,y,y')dx$, sous la forme voulue d'une différentielle totale, sera

$$(6)\qquad \delta\int_a^b f(x,y,y')\,dx = \int_{x=a}^{x=b}\left(\frac{df}{dy}dx - d\frac{df}{dy'}\right)\delta y.$$

D'après la règle énoncée des maxima et minima, il faudra y égaler à zéro le coefficient de chaque variation δy; ce qui donnera une infinité d'équations comprises dans la formule

$$(7)\qquad \frac{df}{dy}dx - d\frac{df}{dy'} = 0.$$

En d'autres termes, la relation (7) devra être vérifiée en tous les points de la courbe AMB : ce sera l'*équation différentielle* de cette courbe. Comme la fonction f et, par suite, les dérivées partielles $\frac{df}{dy}$, $\frac{df}{dy'}$ dépendent généralement de x, y et y', la différentielle complète $d\frac{df}{dy'}$ sera $\left(\frac{d^2f}{dx\,dy'} + \frac{d^2f}{dy\,dy'}y' + \frac{d^2f}{dy'^2}y''\right)dx$, et l'équation (7), en y supprimant le facteur commun dx, deviendra

$$(8)\qquad \frac{df}{dy} - \frac{d^2f}{dx\,dy'} - \frac{d^2f}{dy\,dy'}y' - \frac{d^2f}{dy'^2}y'' = 0.$$

On voit qu'elle est du second ordre. Son intégration fera donc connaître la ligne AMB demandée; car les deux constantes arbitraires qu'elle introduira se détermineront en exprimant que la courbe passe par les points donnés A et B, ou qu'on doit y avoir $y = \alpha A$ pour $x = a$ et $y = \beta B$ pour $x = b$.

483*. — Justification directe de cette méthode.

(Compléments, p. 536*.)

484. — Exemple : surface de révolution dont l'aire est minimum entre deux cercles parallèles donnés.

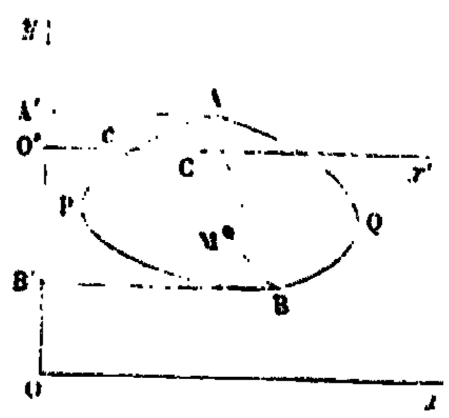
Proposons-nous, comme exemple, de mener entre les deux points donnés A, B (*fig.* 60) la ligne AMB qui, par sa rotation autour de l'axe des y, engendre la surface de révolution minima. Les circonférences décrites ayant ici l'expression $2\pi x$, cette aire est

$$2\pi x ds = 2\pi x\sqrt{1+y'^2}dx$$

pour chaque élément ds de courbe; par suite, abstraction faite du coefficient constant 2π, l'intégrale à rendre minimum sera $\int x ds$ ou $\int x\sqrt{1+y'^2}dx$.

Et d'abord, si la distance mutuelle des deux points A, B se trouve assez peu grande comparativement à leurs distances AA' et BB' de l'axe des y, le minimum cherché existera bien. Il est évident, en effet, que, parmi les lignes menées de A à B dans le plan des xy, celles qui s'éloigneront beaucoup de la droite AB et seront situées, les unes, comme APB, entre cette droite AB et sa projection A'B'

Fig. 60.



sur l'axe de la rotation, les autres, comme AQB, au delà de AB, ne pourront, tant les premières que les secondes, manquer de décrire autour de Oy des surfaces supérieures en étendue à l'aire engendrée par AB ou par les courbes plus ou moins voisines de AB. Il y aura donc l'une de celles-ci, comme ACMB, qui répondra au minimum demandé ou qui, du moins, ne décrira pas plus de surface qu'aucune autre; et si, en exprimant que la variation de l'aire engendrée est nulle au passage de cette courbe à ses voisines, nous obtenons pour son ordonnée y une fonction déterminée de l'abscisse x, la ligne ainsi définie répondra bien à l'énoncé ou sera celle dont la révolution autour de l'axe des y décrit la surface la plus petite.

Observons encore que cette courbe jouira évidemment, dans toutes

ses parties, c'est-à-dire entre deux quelconques de ses points, de la même propriété de minimum ; sans quoi son arc compris entre les deux points où elle cesserait d'en jouir devrait être remplacé par un autre dont l'aire engendrée serait moindre. Si donc il arrive que la courbe cherchée comprenne plusieurs segments, CA et CB, par exemple, ayant en partie même projection sur l'axe des x, on pourra former son équation différentielle en considérant ***séparément*** ces segments CA, CB comme dans le cas où leur point inconnu de jonction C serait une extrémité donnée ; de manière que, sur chaque segment, l'abscisse x se trouve apte à servir de variable indépendante et même croisse sans cesse, d'un bout à l'autre, comme on l'a admis ci-dessus en présentant sous la forme $\int_a^h f(x, y, y')\,dx$ l'intégrale proposée.

Nous aurons donc ici, sur chaque segment CA ou CB,

$$f(x, y, y') = x\sqrt{1+y'^2}$$

et, par suite,

$$\frac{df}{dy} = 0, \qquad \frac{df}{dy'} = \frac{xy'}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

Alors l'équation différentielle (7), réduite à $d\frac{df}{dy'} = 0$, s'intégrera immédiatement et donnera, pour chaque segment CA ou CB,

$$\frac{df}{dy'} = \text{une constante.}$$

D'ailleurs, cette constante sera commune, sauf le signe, aux deux segments contigus CA, CB ; car, à leur point de jonction C (où $y' = \pm\infty$), le rapport $\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$ se réduit à ± 1, et, si l'on appelle c l'abscisse positive de ce point, l'expression de $\frac{df}{dy'}$ s'y réduit à $\pm c$, forme qu'elle peut évidemment prendre toujours, même quand il n'y a pas de sommet comme C ou que tout l'arc AMB appartient à un seul segment. Donc, en élevant au carré, puis résolvant par rapport à $dy^2 = y'^2\,dx^2$, on trouve, pour ***toute*** la courbe cherchée ACB, l'équation différentielle ***unique***

$$\frac{x^2y'^2}{1+y'^2} = c^2 \quad \text{ou} \quad dy^2 = \frac{c^2\,dx^2}{x^2-c^2}. \tag{9}$$

Tirons enfin la valeur $\pm c\frac{dx}{\sqrt{x^2-c^2}}$ de dy, positive de C en A, né-

gative de C en B, et qui, d'après la formule (26) de la page 50, est la différentielle de l'expression $\pm c\left[\log\left(x+\sqrt{x^2-c^2}\right)-\log c\right]$ ou $\pm c \log \dfrac{x+\sqrt{x^2-c^2}}{c}$ nulle au point de départ C de chaque branche. Appelons c' l'ordonnée de ce point de départ, inconnue comme son abscisse c, et une intégration immédiate de $d(y-c')=dy$, effectuée à partir de C le long de chacun des deux segments, donnera

$$y-c'=\pm c\log\frac{x+\sqrt{x^2-c^2}}{c},$$

ou, pour l'équation finie générale de toute la courbe,

$$(10) \qquad \left(\frac{y-c'}{c}\right)^2=\left(\log\frac{x+\sqrt{x^2-c^2}}{c}\right)^2.$$

Les deux constantes arbitraires c, c' qu'a introduites l'intégration se détermineront, comme il a été dit (p. 251), en faisant passer la courbe par les deux points donnés A et B. Une fois qu'elles sont connues, cette équation (10) se simplifie beaucoup si l'on adopte pour axe des x la perpendiculaire $O'Cx'$ menée par le sommet C à l'axe Oy de la rotation et pour unité de longueur la distance $O'C=c$ du même sommet à ce dernier axe. Ces choix reviennent, en effet, à prendre $c'=0$, $c=1$; d'où il résulte, au lieu de (10), en extrayant d'ailleurs les racines carrées des deux membres,

$$\pm y=\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right).$$

Or passons des logarithmes aux nombres : nous aurons

$$x+\sqrt{x^2-1}=e^{\pm y};$$

et si nous résolvons enfin par rapport à x, en isolant d'abord le radical $\sqrt{x^2-1}$ qu'une élévation au carré fait ensuite disparaître, il viendra

$$(11) \qquad x=\frac{e^{\pm 2y}+1}{2e^{\pm y}}=\frac{1}{2}\left(e^{\pm y}+e^{\mp y}\right)=\text{coh}\,y.$$

La courbe, évidemment symétrique de part et d'autre de l'axe $O'Cx'$, représentée par cette équation a reçu le nom de *chaînette*, parce que, si on la dispose de manière que l'axe $O'Cx'$ soit dirigé verticalement et vers le haut, elle dessine la forme d'équilibre d'un fil pesant homogène, fixé à ses deux extrémités. Une de ses propriétés

nous l'avait déjà fait connaître dans les *Compléments* (p. 63*). C'est Meusnier qui, vers 1776, lui a découvert celle d'engendrer la surface de révolution minima.

485*. — Extension de la méthode au cas d'une intégrale multiple; problème général des surfaces à aire minima, reliant un contour donné.

(Compléments, p. 538*.)

486. — Maxima et minima relatifs des intégrales; problèmes sur les courbes isopérimètres.

Nous avons supposé, jusqu'ici, complètement arbitraire entre les deux limites données $x = a$, $x = b$, la variation élémentaire δy de la fonction y dont dépend l'intégrale étudiée $\int_a^b f(x, y, y')\,dx$; car il s'agissait, au fond, de chercher les maxima ou minima *absolus* d'une fonction de toutes les valeurs successives de y *entre* ces limites, et rien, à part la condition de variation graduelle incapable de constituer une relation précise, ne restreignait l'indépendance mutuelle de ces valeurs. Mais admettons maintenant que les variables dont dépend l'intégrale, réduites encore aux valeurs d'une seule fonction y ou, parfois même, comprenant aussi celles d'autres fonctions inconnues, doivent vérifier d'après l'énoncé certaines équations dans lesquelles entreront soit quelques-unes de ces variables, savoir, par exemple, les valeurs de y qui correspondent à une ou plusieurs valeurs infiniment voisines de x, soit même tout leur ensemble; et que l'on ait, par conséquent, à chercher, pour l'intégrale proposée, comme $\int_a^b f(x, y, y')\,dx$, un minimum ou maximum *non plus absolu*, mais seulement *relatif*, c'est-à-dire une valeur ou plus petite, ou plus grande, non pas que toutes ses voisines, mais que toutes celles d'entre elles qui vérifient les conditions données.

Alors certaines des variations δy, ou autres analogues quand plus d'une fonction est à déterminer dans le problème, cesseront d'être arbitraires. Car les relations proposées, mises sous la forme $\varphi = 0$, $\psi = 0$, ..., pourront évidemment se différentier en y faisant croître, par exemple, de δy chaque valeur de y qui y figure, c'est-à-dire en y modifiant très peu la forme des fonctions inconnues, et si l'on appelle $\delta\varphi$, ou $\delta\psi$, ... (*variation* de chaque premier membre φ, ψ, ...)

l'espèce de différentielle totale de φ, ou de ψ, ... ainsi obtenue, il est clair que les équations $\delta\varphi = 0$, $\delta\psi = 0$, ... détermineront autant de variations (comme est δy pour une valeur déterminée de x), en fonction *linéaire* des autres, qu'il y aura d'équations de condition données $\varphi = 0$, $\psi = 0$, ... On ne pourra donc égaler à zéro, dans l'expression de $\delta \int_a^b f(x, y, y')\, dx$, que le coefficient définitif ou total des *seules* variations *restées indépendantes;* et le nombre des équations de maximum ou minimum fournies par le principe de Képler se trouvera inférieur à celui des inconnues, qui sont les diverses valeurs de y ou fonctions analogues pourvues de variations. Mais les équations de condition $\varphi = 0$, $\psi = 0$, ... compléteront justement ce nombre.

L'élimination des variations non indépendantes se fait très élégamment par la méthode des facteurs indéterminés, expliquée au n° **109** (t. I, p. 179), à propos de la théorie des maxima et minima relatifs des fonctions d'un nombre fini de variables. On a vu (même numéro, p. 181) qu'il en résulte une règle pratique simple, consistant à opérer comme s'il s'agissait de rendre un maximum ou minimum *absolu*, non la fonction proposée, mais cette fonction accrue de la somme, $\lambda\varphi + \mu\psi + \ldots$ des premiers membres des équations de condition respectivement multipliés par des *constantes* indéterminées λ, μ, ... Cette manière de procéder est, d'ailleurs, évidente quand la fonction totale ainsi formée admet en effet un maximum ou un minimum absolu, du moins pour des valeurs de λ, μ, ... propres à annuler φ, ψ, ... à l'instant du maximum ou minimum; car celui-ci, nécessairement plus grand ou nécessairement plus petit que toutes les valeurs voisines de la fonction totale, est bien, en particulier, soit toujours supérieur, soit toujours inférieur à celles d'entre elles qui vérifient sans cesse les conditions proposées $\varphi = 0$, $\psi = 0$, ... On obtient donc autant d'équations qu'il y a de variables inconnues, valeurs successives de y par exemple; et l'on voit que les équations de condition $\varphi = 0$, $\psi = 0$, ... se vérifient grâce à un choix convenable des facteurs indéterminés en même nombre λ, μ, ...

Supposons, par exemple, que la courbe AMB (p. 248), le long de laquelle est prise l'intégrale $\int_a^b f(x, y, y')\, dx$ à rendre maximum ou minimum, doive donner une valeur constante connue K à une autre intégrale de forme analogue $\int_a^b F(x, y, y')\, dx$. Il y aura donc à in-

troduire une condition

$$\int_a^b F(x, y, y')\,dx - K = 0, \tag{18}$$

dans le genre de $\varphi = 0$; et l'on opérera, par suite, comme si l'on cherchait le maximum ou le minimum absolu de l'expression totale $\int_a^b f(x, y, y')\,dx + \lambda\left(\int_a^b F(x, y, y')\,dx - K\right)$, c'est-à-dire, plus simplement, de la somme

$$\int_a^b [f(x, y, y') + \lambda F(x, y, y')]\,dx, \tag{19}$$

vu la constance de λ et de K, qui permet de ne pas compter le terme *invariable* $-\lambda K$. On aura ainsi à traiter une question analogue à celles des numéros précédents, sauf la détermination de λ qui restera finalement à effectuer par l'équation (18).

Les géomètres de la fin du XVII^e siècle ont résolu, dans ce genre, sur les courbes planes, de célèbres problèmes, qu'ils appelaient *Problèmes sur les isopérimètres,* parce qu'ils s'y donnaient comme condition que ces courbes eussent toutes *périmètre égal,* c'est-à-dire la même longueur $K = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx$. Nous traiterons bientôt, au moyen de considérations directes plus simples que l'emploi du calcul des variations, quelques questions, particulièrement intéressantes, parmi lesquelles se trouvera le plus important de ces problèmes sur les courbes isopérimètres, relatif à la surface plane maxima d'une longueur de contour donnée.

487. — Courbes planes de longueur donnée, qui, menées entre deux points fixes, engendrent les deux surfaces maxima et minima de révolution autour d'un axe donné.

Contentons-nous ici d'appliquer la méthode générale à un exemple complétant la question du n° 484 (p. 252). Supposons que la courbe variable ACB à laquelle on veut faire décrire autour de Oy une surface de révolution, n'ait plus sa longueur totale $\int ds$ arbitraire, mais, au contraire, astreinte à égaler une droite connue K. Il est alors évident que, si les deux extrémités A, B sont données assez près l'une

de l'autre (de sorte que leur distance AB n'atteigne pas K), et, en même temps, assez loin de l'axe de révolution Oy, non seulement l'aire engendrée $2\pi\int x\,ds$ admettra un minimum *relatif*, puisqu'elle en aura un *absolu*, mais qu'elle comportera de plus un *maximum relatif*, par l'impossibilité de grandir indéfiniment où la mettront la longueur assignée K et les deux distances invariables extrêmes AA′, BB′, à l'axe de révolution, de l'arc générateur. Il y aura donc deux certaines formes de celui-ci, APB et AQB, par exemple, qui, dans la rotation autour de Oy, engendreront, l'une, l'aire la plus petite, l'autre, l'aire la plus grande.

Cette aire ayant pour expression (au facteur constant près 2π) $\int x\,ds$, l'intégrale (19) dont il y aura lieu d'annuler identiquement la variation sera $\int(x+\lambda)\,ds$; et il suffira d'un simple déplacement $(-\lambda)$ de l'origine O, sur l'axe même Ox, de manière à rendre $x+\lambda$ égal à une nouvelle abscisse X, pour la réduire à $\int X\,ds$, ou encore à $\pm\int X\,ds$, par un changement facultatif de sens des nouvelles abscisses positives, destiné à faire prendre celles-ci, autant que possible, en valeur absolue. Si x désigne finalement la nouvelle abscisse $\pm X$, l'on est donc ramené à chercher, de même qu'au n° 484, le minimum de $\int x\,ds = \int x\sqrt{1+y'^2}\,dx$; ce qui donne comme solution une chaînette ayant pour base le nouvel axe des y.

Ainsi, le minimum et le maximum demandés se trouvent représentés par les arcs APB, AQB de deux chaînettes dont les bases ou directrices seront parallèles à l'axe de révolution donné Oy et situées à des distances de celui-ci telles, que la longueur de ces arcs, entre les deux extrémités connues A, B, ait précisément la valeur donnée K.

488*. — Maxima ou minima des intégrales à champ d'intégration variable, et qui dépendent de fonctions variables aussi aux limites de ce champ.

(Compléments, p. 542*.)

489*. — Autre méthode, impliquant le choix de variables indépendantes qui assurent l'invariabilité du champ d'intégration; application à l'intégrale $\int F(x, y, z)\,ds$ prise le long d'une courbe.

(Compléments, p. 547*.)

490*. — Conditions de maximum ou de minimum relatives aux limites, pour des intégrales prises le long de lignes ayant leurs extrémités mobiles sur des courbes ou des surfaces données.

(Compléments, p. 553*.)

491*. — Cas où ces lignes sont astreintes à ne pas quitter une surface donnée; démonstration, par l'analyse, des propriétés générales des lignes géodésiques.

(Compléments, p. 556*.)

492*. — Minimum d'une intégrale plus générale que $\int F(x, y, z)\,ds$; principe de la moindre action.

(Compléments, p. 559*.)

493 — Brachistochrone ou courbe de plus rapide descente d'un mobile pesant.

Certains problèmes se résolvent par des considérations directes, surtout géométriques, plus rapidement que par les procédés uniformes du calcul des variations, même quand celui-ci y conduit à des équations différentielles ou aux dérivées partielles complètement intégrables. Tel est, en particulier, le cas du problème célèbre de la *brachistochrone*, traité en 1696 par Jean Bernoulli et qui a été comme le point de départ du calcul des variations.

Voici en quoi il consiste, et comment Jean Bernoulli l'a résolu en le rattachant au problème de Fermat (t. I, p. 167), qui dépend de la question des maxima et minima ordinaires des fonctions d'un nombre fini de variables ou plutôt même d'une seule variable.

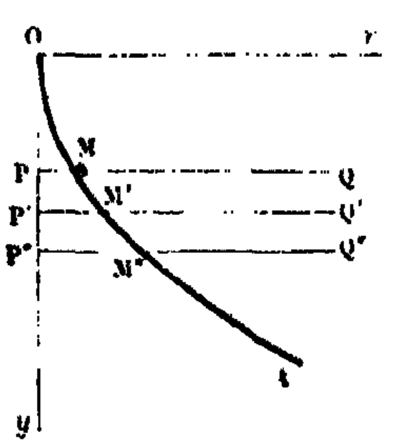
Un corps pesant M (p. 260), guidé par une courbe matérielle polie OA, doit tomber d'un point connu O et arriver ainsi à un autre point plus bas (ou du moins aussi bas) A, également assigné : il s'agit de donner à la courbe OA la forme, dite *brachistochrone*, propre à abréger le plus possible la durée du trajet.

Dans le plan qui contient la verticale Oy et le point d'arrivée A, prenons Oy pour axe des ordonnées et l'horizontale Ox, tirée par rapport à Oy du côté où se trouve le point A, pour axe des abscisses. On sait que, abstraction faite de la résistance de l'air et du frottement de la courbe, la vitesse acquise par le mobile après une

hauteur quelconque totale y de chute se trouve, à un facteur constant près, mesurée par la racine carrée, $\sqrt{y}$, de cette hauteur. Or il suit de là que la brachistochrone cherchée OA sera contenue tout entière dans le plan xOy; car, si elle en sortait et qu'on la comparât à sa projection sur xOy considérée aussi comme trajectoire possible du mobile, ses divers éléments seraient parcourus avec la même vitesse que les éléments correspondants, situés au même niveau, mais plus courts ou pour le moins aussi courts, de cette projection sur xOy, qui, dès lors, demanderait un temps de parcours moindre et devrait, plutôt qu'elle, être qualifiée de *brachistochrone*.

Cela posé, si l'on partage le plan des xy, par des parallèles à Ox, en une infinité de bandes horizontales, d'une largeur dy pareille

Fig. 61.



ou non, mais infiniment petite, le mobile M pourra, sauf erreur négligeable dans le calcul de la durée de son trajet, ou, par suite, dans la construction de sa trajectoire, être censé avoir la vitesse constante $\sqrt{y}$ à l'intérieur de la bande quelconque PQQ'P' comprise entre deux consécutives, $OP = y$, $OP' = y + dy$, de ses ordonnées, et prendre la vitesse $\sqrt{y + dy}$ dans la bande suivante P'Q'Q"P". Soient MM' et M'M" les deux éléments correspondants de sa trajectoire cherchée, dès lors rectilignes à la traversée de chaque bande. Comme, évidemment, la durée du trajet total ne peut être minima qu'à la condition de se trouver telle entre M et M", la détermination du point intermédiaire M', sur la ligne de séparation P'Q' des deux bandes, rentrera dans le problème de Fermat (t. I, p. 168), où l'on supposerait, pour le premier milieu PQQ'P', la vitesse donnée V égale à $\sqrt{OP}$, et, pour le second milieu, la vitesse V' égale à $\sqrt{OP'}$. La loi des sinus (t. I, p. 169), en obser-

vant que l'angle d'*incidence* i sera le complément de QMM' et, l'angle de *réfraction* r, le complément de Q'M'M'', donnera

$$\frac{\sin i}{V} = \frac{\sin r}{V'} \quad \text{ou} \quad \frac{\cos QMM'}{\sqrt{OP}} = \frac{\cos Q'M'M''}{\sqrt{OP'}}.$$

On voit donc que le rapport, à la racine carrée de l'ordonnée y, du cosinus $\frac{dx}{ds}$ de l'angle formé, par chaque élément ds du chemin décrit, avec sa projection positive dx sur l'axe des abscisses, devra être invariable le long de la courbe. Appelons $\frac{1}{\sqrt{2r}}$ ce rapport positif constant $\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{dx}{ds}$: l'équation caractéristique de la brachistochrone sera ainsi

$$(61) \qquad \frac{1}{\sqrt{y}}\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2r}},$$

ou, après substitution de $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ à ds et isolement du coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$,

$$(62) \qquad \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{2r}{y} - 1}.$$

On y reconnaît (t. I, p. 225) l'équation différentielle caractéristique d'un arceau de cycloïde, décrit, au-dessous de Ox comme base, par un point d'une circonférence de rayon r. Ainsi, dans les conditions proposées, *la brachistochrone sera un arceau de cycloïde à base horizontale, ayant son point de départ, avec tangente verticale, au plus élevé,* O, *des deux points donnés*, et sa circonférence génératrice $2\pi r$ telle, que cet arceau aille passer par le second point A. Comme les équations (62) ou (61) restent satisfaites quand x, y, dx, dy, ds, r varient dans un même rapport quelconque, un pareil arceau, d'abord ramassé tout entier en O, balaye ou décrit l'angle xOy, dans toute son étendue, quand le paramètre r croît de zéro à l'infini; car chaque élément ds, de direction invariable, balaye alors pour sa part la fraction infiniment petite qui lui correspond (et ne correspond qu'à lui), de cet angle droit, en s'éloignant indéfiniment de O. Donc chaque point A du plan n'est atteint qu'une fois par la courbe mobile et ne l'est que par un seul de ses points; en sorte que l'on obtient bien, où que soit donné A dans l'angle xOy, un arceau et un seul pour la brachistochrone demandée. Sa partie comprise entre O et A se trouve

tout entière descendante à partir de O quand, en A, le rapport $\frac{y}{x}$ dépasse la valeur correspondant au point le plus bas des arceaux. Elle a une seconde partie, ascendante, dans le cas contraire. Cette seconde partie appartient bien, comme nous l'avons admis implicitement, au même arceau que la première; car, de part et d'autre du point le plus bas, où $\frac{dx}{ds} = 1$ et dont on peut appeler Y l'ordonnée, l'équation caractéristique (61) donne pour la constante $\frac{1}{\sqrt{2r}}$ une seule expression $\frac{1}{\sqrt{Y}}$ ou, pour le rayon r de la circonférence génératrice, la valeur unique $\frac{1}{2}$ Y, impliquant le choix de Ox comme base commune des deux demi-arceaux contigus.

191. — Considérations générales touchant la ligne de longueur donnée, qui, tracée sur une surface plane ou même courbe, y entoure l'aire maxima, et touchant la superficie fermée qui, sous une certaine aire totale, embrasse le plus grand volume.

C'est encore par des considérations géométriques que nous traiterons les deux questions les plus importantes peut-être de maximum ou de minimum relatif d'intégrales définies, que l'on puisse se poser, savoir, celles de la surface plane qui, dans un contour de longueur donnée, possède l'aire la plus grande, et du solide qui, sous une surface totale donnée, comprend le plus grand volume.

Les anciens s'étaient, de bonne heure, proposé ces deux beaux problèmes dont la solution (ou du moins son pressentiment) paraît remonter jusqu'à Pythagore, au VI^e siècle avant notre ère.

Lorsqu'on fait varier entre des limites quelconques l'étendue d'une figure à deux ou à trois dimensions toujours semblable à elle-même, surface ayant un contour que nous appellerons C et une aire que nous désignerons par A, ou solide de surface S et de volume V, les rapports $\frac{A}{C^2}$ et $\frac{V}{S\sqrt{S}}$ restent invariables; car on sait qu'ils dépendent seulement de la forme de ces figures, non de leur grandeur. Les questions posées, dans les deux cas d'une aire plane et d'un volume quelconque, ont donc pour but de déterminer la forme qui rend ces rapports les plus grands possible, ou qui rend, par suite, minima leurs inverses $\frac{C^2}{A}$ et $\frac{S\sqrt{S}}{V}$. Ainsi, elles reviennent à chercher les plus petites valeurs du

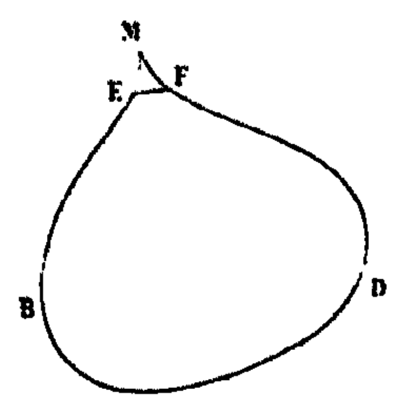
contour C ou de la surface S d'une figure soit plane, soit solide, qui a une certaine étendue donnée A ou V; et il est évident, surtout en se plaçant à ce point de vue, que les problèmes posés admettent bien une solution, c'est-à-dire que le minimum existe, du moins en tant que valeur inférieure à toute autre; car les fractions $\frac{C^2}{A}$, $\frac{S\sqrt{S}}{V}$, à dénominateurs positifs constants, auront inévitablement leurs numérateurs toujours plus grands que zéro.

On conçoit que la détermination de cette plus forte ou plus faible valeur des rapports directs ou inverses considérés présente un haut intérêt en Philosophie naturelle. Elle entraînera, par exemple, la connaissance de la forme que devra recevoir un corps d'un volume déterminé pour avoir le moins de surface possible ou, toutes choses égales d'ailleurs, le moins de *rapports extérieurs*, forme dont on devrait, par suite, l'écarter, s'il s'agissait, au contraire, de multiplier ses relations physiques avec le dehors; etc.

Une propriété presque évidente de cette forme cherchée, qui rend maximum le rapport $\frac{A}{C^2}$ ou $\frac{V}{S\sqrt{S}}$, c'est qu'*elle n'admet aucune discontinuité de la tangente ou du plan tangent, aucun point anguleux ou aucune arête.*

Si, en effet, une courbe plane fermée MBD (*fig.* 62) présente un point *saillant* ou *rentrant* M, il suffira d'y remplacer les deux éléments contigus du contour, ME et MF, par la droite EF qui joint leurs extrémités et dont le rapport à leur somme ME + MF est évidemment

Fig. 62.



moindre que 1, pour obtenir une nouvelle surface BEFD, dans laquelle le contour C sera inférieur au proposé d'une quantité ME + MF — EF, *du premier ordre de petitesse* comme ME ou MF, tandis que son aire ne différera de l'aire primitive BMD que par une partie EMF tout au plus comparable au produit EF $\times$ EM et, par suite, *du second ordre*

au moins, ou négligeable, à côté de la précédente, dans le rapport $\frac{A}{C^2}$. Donc ce rapport de l'aire au carré du contour grandit, quand on passe de la figure proposée BMD à la figure BEFD; et il n'était pas aussi grand que possible dans la première.

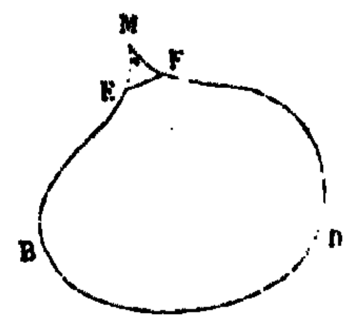
De même, si un solide donné présente soit une *pointe*, soit une *arête*, saillante ou rentrante, il suffit de les couper, en leur substituant une surface continue infiniment étroite, pour y diminuer l'aire d'une quantité comparable à la surface des parties remplacées, quantité infiniment supérieure, numériquement, au volume en même temps retranché ou ajouté, dont l'expression comprendra toujours comme facteur une dimension infiniment petite de plus. Ainsi, dans le rapport, $\frac{V}{S\sqrt{S}}$, du volume à la puissance $\frac{3}{2}$ de la surface, le dénominateur décroîtra sans que, pour ainsi dire, le numérateur varie : d'où il suit que ce rapport grandira et qu'il ne saurait être actuellement maximum.

Ce genre de raisonnement, un peu modifié, et sa conclusion, sous certaines réserves, s'étendent au cas où les figures à comparer en vue de choisir la plus étendue, sont les différentes portions d'une surface courbe, limitées par un contour de même longueur, diverses parties d'une sphère, par exemple. Et, cependant, l'on ne peut plus y faire appel aux considérations basées sur la similitude ; car des figures semblables à celles de la surface proposée, mais construites à des échelles autres, ne pourraient généralement pas se placer sur elle et sont, par suite, étrangères à la catégorie qu'il s'agit d'étudier.

Alors une aire plus grande que toute autre existe, au moins dans chaque région définie de la surface, quand, eu égard aux dimensions et à la nature de cette région, le contour assigné ne se trouve pas trop long, mais non dans le cas contraire; et, entre ces limites, un très petit accroissement dC, donné au contour C qui entoure l'aire A la plus grande, en attribuant encore au nouveau contour $C + dC$ la forme et la situation pour lesquelles la nouvelle aire $A + dA$ est également maxima, entraîne une augmentation dA de celle-ci numériquement comparable à dC, sauf du moins pour des valeurs exceptionnelles de C; car A et C, nuls ensemble, acquièrent ensemble des grandeurs finies. Cela posé, si un tel contour BMD, sur la surface (*fig.* 63), présentait un point anguleux M, la suppression de celui-ci, ou le remplacement, sur la surface même, de BMD par le nouveau contour BEFD, réduirait d'une quantité du premier ordre, $-dC$, le périmètre C, sans faire varier dans une proportion comparable l'aire A ;

et si, gardant alors la nouvelle longueur BEFD ou $C - dC$ du contour, on lui donnait la forme voulue pour laquelle l'aire correspon-

Fig. 63.



dante a la valeur maxima $A - dA$, celle-ci, d'après le principe admis que dA et dC sont comparables, se trouverait moindre que l'aire isopérimètre BEFD très sensiblement égale à A, alors que sa qualité d'aire maxima lui impose d'être plus grande.

Donc, *même sur une surface courbe* (*supposée bien continue*), *nulle ligne présentant un point anguleux ne saurait, dans sa longueur donnée, embrasser l'aire maxima.*

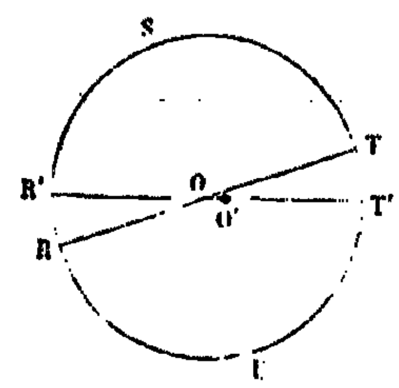
495. — Courbe de longueur donnée qui, sur un plan ou sur une sphère, entoure l'aire maxima : cette courbe est un cercle.

Le principe de continuité précédent ainsi établi, considérons en premier lieu le cas d'une surface plane; et soit RSTU (p. 266) celle dont l'aire, à périmètre égal, est la plus grande possible. Par un quelconque, R, de ses points, menons une corde ou sécante RT, et faisons-la tourner autour de R jusqu'à ce qu'elle partage le contour C en deux parties équivalentes. A ce moment, il y aura une des deux parties RTS, RTU de la surface qui sera ou plus étendue que l'autre ou, pour le moins, aussi étendue que l'autre. Soit RST cette partie. Si l'on prend sa symétrique par rapport à RT et qu'on lui adjoigne cette symétrique, on obtiendra évidemment une surface ayant contour équivalent à celui de la proposée et au moins autant d'aire. Par suite, d'après la propriété démontrée ci-dessus, les angles que feront, avec RT, les tangentes menées en R et en T à la courbe RST seront droits; sans quoi ceux, deux fois plus grands, que présenterait en R et en T la figure RST complétée par sa symétrique, différeraient de deux droits, et constitueraient une discontinuité inadmissible en vertu du principe précédent.

Ainsi, dans la surface considérée RSU, toute corde, RT par exemple, qui sous-tend un arc égal à la moitié du contour, *lui est perpendiculaire* à ses deux extrémités. Or, si l'on mène une seconde

corde pareille et infiniment voisine R'T', on aura évidemment arc RST = arc R'ST'; d'où arc RR' = arc TT' et aussi, sensiblement, corde RR' = corde TT'. D'ailleurs, RT et R'T' se croisant évidemment

Fig. 64.



en un certain point O, les triangles ORR', OTT' que délimitent latéralement ces deux droites, peuvent être censés isoscèles (à cause de leurs angles à la base sensiblement droits) et donnent, sauf erreur *infiniment plus petite que* RR', OR' = OR, OT' = OT; d'où R'T' = RT, c'est-à-dire R'T' — RT = une quantité d'un ordre de petitesse supérieur au premier, et, par suite, $d(\mathrm{RT}) = 0$ ou RT = une constante. Il résulte ensuite de la double égalité des angles au sommet O et des bases RR', TT' (à des erreurs relatives près négligeables), que les deux triangles sont égaux eux-mêmes, ou qu'on a de plus $\mathrm{OR} = \mathrm{OT} = \frac{1}{2}\mathrm{RT} = \text{const.}$, sauf écarts infiniment petits. Donc les normales RO, R'O', ..., menées à la courbe en une suite de points voisins, et prolongées chacune jusqu'à leur intersection par la suivante, ne présentent entre elles que des différences d'un ordre de petitesse supérieur au premier, c'est-à-dire incapables de produire par leur accumulation un total fini. La différence R'O' — RO se trouvant ainsi d'un ordre supérieur au premier, comme l'était déjà R'O — RO, il en sera évidemment de même de R'O' — R'O = OO', distance de deux points d'intersection successifs; et, par suite, toutes les normales, d'égale longueur, ne pourront manquer d'aboutir à un centre unique O. C'est dire que la courbe RSU se réduit à une circonférence, ou que ***la surface plane à aire maximum, d'un périmètre donné, est un cercle.***

Le rapport $\frac{A}{C^2}$ de l'aire au carré du contour, dans une figure plane, a donc pour plus grande valeur possible

$$\frac{\pi R^2}{(2\pi R)^2} = \frac{1}{4\pi} = 0{,}079577\ldots,$$

c'est-à-dire l'inverse de la surface d'une sphère de rayon 1.

Si la courbe RSTU, au lieu d'être tracée sur un plan, devait se trouver sur une sphère et y entourer la surface sphérique la plus grande possible, la même démonstration s'appliquerait, sans autres changements que la substitution de plans diamétraux aux sécantes précédentes et d'arcs de grands cercles aux cordes RT, R'T', RR' TT', ..., ou de triangles sphériques aux triangles rectilignes ROR', TOT'. Il faudrait, toutefois, supposer les arcs RT, R'T' inférieurs à un demi-grand cercle, pour pouvoir, de l'égalité de RR' à TT', conclure celle de OR à OT. Sous cette réserve, on obtiendrait encore, pour la courbe demandée, une circonférence, ayant son pôle en O. Ainsi, *la courbe fermée qui, sur une surface sphérique (et non pas seulement sur le plan), embrasse, à longueur égale, la plus grande superficie, est la circonférence,* pourvu toutefois que le maximum cherché existe. Evidemment, cela n'a lieu, dans le cas de la sphère, qu'autant que la circonférence en question ne devient pas celle d'un grand cercle.

Sauf cette restriction, on voit que, par exemple, à la surface de la terre, un pays d'une étendue déterminée offre la moindre longueur possible de frontières quand son contour est circulaire, ou quand sa forme se rapproche le plus possible de celle d'une simple calotte.

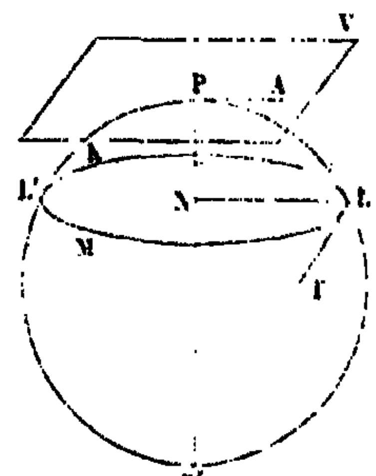
196. — Surface d'une étendue donnée enfermant le plus grand volume; elle n'est autre qu'une sphère.

Considérons enfin la surface courbe fermée qui, sous une certaine aire totale S, comprend le plus grand volume, et soit KLM (p. 268) sa section par un plan quelconque. Je dis que cette section sera nécessairement circulaire.

Menons, en effet, à la surface un plan tangent PV parallèle à KLM et, dans ce plan, par le point P de contact, la tangente quelconque PA; puis imaginons qu'un plan mené suivant PA tourne, autour de cette droite, jusqu'à l'instant où, coupant le solide suivant une certaine courbe PLP'L', il partage la surface du solide en deux parties, PLP'K, PLP'M, équivalentes. Alors celle de ces deux parties qui recouvre le plus grand volume formera évidemment, avec sa symétrique par rapport au plan PLP' qui la limite, une surface fermée de même aire que la proposée et contenant le volume le plus grand possible. Or la figure ainsi obtenue, symétrique de part et d'autre du plan PLP'L', ne peut avoir une arête tout le long de son intersection avec ce plan; et celui-ci est, dès lors, forcément normal en tous leurs points communs. Donc, ce plan PLP' se trouve : 1° mené sui-

vant la normale PP′, en P, à la surface proposée, et, 2°, perpendiculaire à la tangente LT de la courbe KLM, comme l'étant à deux plans

Fig. 65.



qui se coupent suivant LT, savoir, au plan KLM dont il contient la perpendiculaire PP′ et au plan tangent en L à la surface.

Par suite, la normale LN à la courbe proposée KLM est dans le plan PLP′ et va passer par le pied N de la perpendiculaire PP′ abaissée du point P sur le plan de cette courbe. Comme il en serait évidemment de même pour tous les autres plans menés suivant PP′ et coupant la courbe KLM en des points quelconques, toutes les normales de cette courbe iront passer par le point N, auquel se réduira, dès lors, sa développée. Ainsi, la section plane KLM du solide proposé est bien une circonférence, dont le centre se trouve, avec tous ceux des sections analogues faites par des plans de même direction, sur la perpendiculaire PP′ commune à ces plans.

En conséquence, la surface courbe considérée a une forme de révolution autour de PP′; mais, comme son méridien constitue une autre de ses sections planes et ne peut manquer davantage d'être un cercle, elle se réduit forcément à une sphère. Donc, *la sphère est, de tous les corps de même surface, celui qui a le plus grand volume.*

Ce résultat capital, connu dès l'antiquité, et bien facile à démontrer, comme on voit, géométriquement, n'a pu encore être établi complètement par l'Analyse (1).

(1) Le calcul des variations y conduit, comme condition de maximum ou de minimum, à une équation aux dérivées partielles exprimant que la surface cherchée doit avoir partout même courbure moyenne (t. I, p. 250*); après quoi il ne reste plus qu'à reconnaître, en intégrant cette équation aux dérivées partielles, si la sphère est la seule surface continue à courbure moyenne constante. Or c'est bien ce qu'a fait M. Jellett (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, de Liouville, t. XVIII, p. 163; 1853) pour les surfaces qui ne sont rencontrées qu'en un point par les rayons vecteurs émanés d'une origine prise à leur intérieur, mais ce qu'on n'a pu faire encore d'une manière entièrement générale.

La plus forte valeur possible du rapport d'un volume V à la puissance $\frac{3}{2}$ de l'aire S qui le limite sera donc

$$\frac{V}{S\sqrt{S}} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{4\pi R^2\sqrt{4\pi R^2}} = \frac{1}{6\sqrt{\pi}} = 0{,}09403\ldots,$$

fraction sensiblement supérieure à celle, $\frac{1}{4\pi}$ ou $0{,}07957\ldots$, qui exprime le plus grand rapport possible d'une surface plane au carré de son contour.

497*. — Sur des cas où, pour distinguer entre un minimum, un maximum et l'absence tant de l'un que de l'autre, il convient d'attribuer, aux variations, des valeurs sensibles, au lieu de valeurs infiniment petites; application à l'intégrale $\int F\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right) ds$, prise entre deux points fixes.

(Compléments, p. 564*.)

498*. — Application de la même méthode à des problèmes de maximum ou de minimum relatif; propriétés de minimum dont jouit la forme de l'onde solitaire.

(Compléments, p. 568*.)

499*. — Intégrales s'étendant, l'une, à tout le volume d'un corps, l'autre, à sa surface, et dont la somme est rendue minima par la fonction qui exprime les températures stationnaires de ce corps dans des conditions données.

(Compléments, p. 574*.)

500*. — Utilisation de cette propriété de minimum pour démontrer l'existence d'une solution générale du problème des températures stationnaires; autres problèmes, dans lesquels la même méthode atteint un résultat analogue et a, parfois aussi, facilité la mise en équation.

(Compléments, p. 577*.)

FIN DE LA PARTIE ÉLÉMENTAIRE DU TOME II.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS,
55, Quai des Grands-Augustins, 55.